Etude analytique et probabiliste de laplaciens associés à des systèmes de racines : laplacien hypergéométrique de Heckman–Opdam et laplacien combinatoire sur les immeubles affines.

Bruno Schapira

THÈSE

PRÉSENTÉE À L'UNIVERSITÉ D'ORLÉANS

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ D'ORLÉANS

par

Bruno SCHAPIRA

Discipline : **Mathématiques**

Etude analytique et probabiliste de laplaciens associés à des systèmes de racines : laplacien hypergéométrique de Heckman–Opdam et laplacien combinatoire sur les immeubles affines.

Soutenue le **5 décembre 2006**

RAPPORTEURS :

-M. Michael COWLING / Professeur, *Université de Nouvelle Galles du Sud*
-M. Yves GUIVARC'H / Professeur, *Université de Rennes 1*

MEMBRES DU JURY :

-M. Jean-Philippe ANKER	**Directeur de thèse** / Professeur, *Université d'Orléans*
-M. Philippe BOUGEROL	**Directeur de thèse** / Professeur, *Université de Paris 6*
-M. Patrick DELORME	**Examinateur** / Professeur, *Université d'Aix-Marseille 2*
-M. Yves GUIVARC'H	**Rapporteur** / Professeur, *Université de Rennes 1*
-M. Marc YOR	**Examinateur** / Professeur, *Université de Paris 6*

Remerciements

Cette thèse doit énormément à mes directeurs de recherches Jean-Philippe Anker et Philippe Bougerol. Je tiens à leur adresser toute ma reconnaissance pour m'avoir proposé un sujet à la fois très riche et passionnant, et pour leur encadrement exemplaire. Outre leur très grande disponibilité, leur exigence et leur rigueur, je retiendrai leur enthousiasme à chacun de mes progrès, mais aussi leurs constants encouragements quand ça bloquait, qui furent pour moi déterminants dans l'aboutissement de ce travail.

J'ai eu la chance de rencontrer Michael Cowling et Yves Guivarc'h pendant ma thèse. Ils se sont tous les deux tout de suite montrés intéressés par mes travaux, et m'ont proposé des améliorations ou extensions possibles. Je les remercie aujourd'hui d'avoir accepté la lourde tâche de rapporteur.

Certains travaux de Patrick Delorme m'ont beaucoup aidé et inspiré pour une partie de ma thèse. C'est un plaisir pour moi qu'il ait accepté d'être membre de mon jury.

Le bureau de Marc Yor étant presque voisin du mien au LPMA, j'ai eu plusieurs fois l'occasion de lui poser quelques questions, et il y a toujours répondu avec gentillesse. Je le remercie de me faire aujourd'hui l'honneur de participer à mon jury.

J'ai eu l'occasion pendant cette thèse de collaborer avec Bartosz Trojan. Son enthousiasme et son dynamisme ont rendu nos recherches communes agréables et fructueuses.

J'ai également grandement bénéficié de discussions ou échanges de mails avec d'autres chercheurs. Parmi eux je voudrais remercier en particulier Eric Opdam, Margit Rösler, Jean-Louis Clerc, Vadim Kaimanovich, Bertrand Rémy, Jean Bertoin, Sara Brofferio, Emmanuel Cépa et Oleksandr Chybiryakov.

Merci à Anne et Christelle. J'ai eu le grand plaisir de profiter de leur bonne humeur, de leur gentillesse, et de leur efficacité. Merci aussi à mes collègues et amis du MAPMO et du LPMA, qui ont égayé mes journées de travail, pauses déjeuner, sorties...Je pense en particulier à Bruno, Olivier, Dominique, Eric, Hermine, Manon et nos pauses café qui s'éternisaient, Sacha, Alexis, François.

Cette thèse n'aurait sûrement pas vu le jour sans le soutien de toute ma famille, de mes parents, et de ma soeur tout au long de mes études. En particulier c'est à Barbara que je dois ma rencontre avec Jean-Philippe et donc implicitement l'existence de cette thèse. J'espère aussi qu'elle continuera de me faire profiter de ses conseils qui m'ont souvent bien aidé.

Enfin merci à Karolina qui a eu la patience et le courage de me supporter durant toutes ces années. Avant tout autre, c'est elle qui m'a donné l'envie et la force de faire cette thèse.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Cette thèse est consacrée principalement à l'étude de processus aléatoires associés à un système de racines sur un espace euclidien. Cette étude porte sur deux aspects : d'une part des questions de nature analytique, c'est-à-dire essentiellement des estimations précises du noyau de la chaleur, et des fonctions propres du générateur (ce qui joue le rôle du laplacien euclidien usuel pour le mouvement brownien), et d'autre part des questions de nature probabiliste, sur le comportement général des trajectoires.

Par ailleurs les processus que l'on considère peuvent se diviser en deux catégories : des processus stochastiques à temps continu, associés aux opérateurs de Heckman et Opdam, qui seront l'objet de la première partie de cette thèse, et des chaînes de Markov (à temps discret) sur des immeubles affines (de type $\tilde{A}_r$), qui seront l'objet de la deuxième partie.

Il existe en fait de nombreux liens entre ces deux types de processus, ce qui n'est d'ailleurs pas très surprenant. En effet, d'un côté la théorie de Heckman–Opdam est une généralisation naturelle de la théorie (radiale) des espaces symétriques riemanniens de type non compact, et de l'autre côté les immeubles affines sont (pour la plupart) des espaces symétriques de type p-adique. Or il était déjà bien connu qu'il existe des relations étroites entre la théorie des espaces symétriques sur un corps archimédien ou sur un corps p-adique. Un des objectifs de cette thèse est donc de mettre en évidence les similitudes, mais aussi parfois les différences, entre ces deux théories aux niveaux analytiques et probabilistes. Un exemple significatif d'analogie que l'on peut trouver est donné par le théorème 1.0.1 ci-dessous.

On peut l'énoncer comme suit. Notons X le processus étudié (à temps discret ou continu), et D son générateur. On note F_0 une certaine fonction propre positive de D au bas du spectre L^2. Soit Y le F_0-processus relativisé au sens de Doob de X, et soit $\overline{Y}$ sa partie radiale (en un sens qui sera précisé dans la suite). Soit Y^N la suite de F_0-processus renormalisés définie par

$$Y_t^N = \frac{\overline{Y_{[Nt]}}}{\sqrt{N}},$$

pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}^+$. Alors

Théorème 1.0.1 *La suite de processus* $(Y_t^N, t \geq 0)$ *converge en loi vers le mouvement brownien de la chambre de Weyl, lorsque* $N \to \infty$.

Le mouvement brownien de la chambre de Weyl, encore appelé mouvement brownien intrinsèque, a été introduit et étudié notamment par Biane [Bi1]. Nous donnerons plus de détails dans la suite. L'idée du théorème précédent remonte en fait à l'article de Bougerol et Jeulin [B–J1], qui l'ont prouvé dans le cas des arbres homogènes et des espaces symétriques riemanniens de type non compact de rang 1 (comme par exemple les espaces hyperboliques réels ou complexes). En réalité ils démontrent une variante du théorème 1.0.1 pour les ponts de F_0-processus. Le processus limite étant alors le pont du MB intrinsèque en dimension 1, c'est-à-dire le pont du Bessel-3, soit encore l'excursion brownienne normalisée. Avec Anker, ils l'ont ensuite étendu à tous les espaces symétriques riemanniens de type non compact [A–B–J]. Dans cette thèse nous généralisons ce théorème à tous les processus de Heckman–Opdam, et à certaines marches aléatoires au plus proche voisin sur un immeuble affine de type $\tilde{A}_r$.

D'autre part ce résultat illustre bien les interactions fortes qui peuvent exister entre la théorie des probabilités et l'analyse harmonique. Ainsi l'ingrédient principal de la preuve est d'obtenir de bonnes estimations, soit de la fonction F_0 (pour les processus de Heckman–Opdam), soit du noyau de la chaleur (pour les marches aléatoires sur les immeubles affines). Nous reviendrons plus en détails là-dessus dans la suite de cette introduction.

Signalons maintenant le plan de cette thèse. Elle est composée d'une introduction, de deux parties, et d'une annexe. La première partie porte sur la théorie de Heckman–Opdam. Elle est constituée de deux chapitres, chacun reprenant pour l'essentiel un article.

- L'un porte sur la partie analytique de la théorie : Contributions to the hypergeometric function theory of Heckman and Opdam, sharp estimates, Schwartz space, heat kernel.
- L'autre porte sur la partie probabiliste : The Heckman–Opdam Markov processes. L'article est accepté à *Probability Theory and Related Fields*.

La deuxième partie traite des marches aléatoires sur un immeuble affine de type $\tilde{A}_r$. Elle est aussi constituée de deux chapitres, chacun reprenant un article.

- Le premier est écrit en collaboration avec Jean-Philippe Anker et Bartosz Trojan : Heat kernel and Green function estimates on affine buildings of type $\tilde{A}_r$.
- Le second s'intitule : Marches aléatoires sur un immeuble affine de type $\tilde{A}_r$ et mouvement brownien de la chambre de Weyl.

L'annexe est largement indépendante du reste de la thèse. C'est une étude de la frontière de Poisson d'un certain sous-groupe du groupe des matrices inversibles à coefficients rationnels.

1.1 Objets étudiés

1.1.1 Systèmes de racines

Nous introduisons ici la notion standard de système de racines, en suivant généralement [Bou]. On considère un espace euclidien $\mathfrak{a}$ de dimension n, muni du produit scalaire $< \cdot, \cdot >$. Pour $\alpha \in \mathfrak{a}$, on pose $\alpha^\vee := \frac{2}{|\alpha|^2}\alpha$, et on définit la réflexion orthogonale associée à α par

$$r_\alpha(x) := x - < \alpha^\vee, x > \alpha.$$

On identifie tout vecteur de $\mathfrak{a}$ avec la forme linéaire qu'il représente. Ainsi si $\alpha, u \in \mathfrak{a}$, on pose $\alpha(u) =< \alpha, u >$. Par définition, un *système de racines cristallographique* $\mathcal{R}$ est un sous-ensemble de $\mathfrak{a}$ qui satisfait les conditions suivantes :

1. $\mathcal{R}$ est fini, ne contient pas 0, et engendre $\mathfrak{a}$.
2. $\forall \alpha \in \mathcal{R}$, $r_\alpha(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$.
3. $\forall \alpha \in \mathcal{R}$, $\alpha^\vee(\mathcal{R}) \subset \mathbb{Z}$.

On dira qu'il est *réduit* si en plus

$$\forall \alpha \in \mathcal{R}, \quad 2\alpha \notin \mathcal{R}.$$

Le *groupe de Weyl* W, est le sous-groupe fini de $\mathcal{O}(\mathfrak{a})$ engendré par les r_α, où $\alpha \in \mathcal{R}$. On se fixe un sous-ensemble de racines positives $\mathcal{R}^+$, que l'on peut définir comme suit : on fixe d'abord $u \in \mathfrak{a}$, tel que $0 \notin u(\mathcal{R})$, puis l'on pose $\mathcal{R}^+ = \{\alpha \in \mathcal{R} \mid u(\alpha) > 0\}$. On pose aussi $\mathcal{R}^- = -\mathcal{R}^+$, si bien que $\mathcal{R} = \mathcal{R}^+ \cup \mathcal{R}^-$. Soit $\mathcal{R}_0$ l'ensemble des *racines indivisibles*, i.e. les α telles que $\frac{\alpha}{2} \notin \mathcal{R}$. On pose aussi $\mathcal{R}_0^+ := \mathcal{R}_0 \cap \mathcal{R}^+$. Soit

$$\mathfrak{a}_+ = \{x \in \mathfrak{a} \mid \forall \alpha \in \mathcal{R}^+, \ < \alpha, x > \, > 0\},$$

la *chambre de Weyl positive* associée. On note $\overline{\mathfrak{a}_+}$ son adhérence et $\partial\mathfrak{a}_+$ sa frontière. On appelle *mur* tout hyperplan orthogonal à une racine $\alpha \in \mathcal{R}$. On note $\mathfrak{a}_{\text{reg}}$ l'ensemble des *points réguliers*, i.e. l'espace $\mathfrak{a}$ privé des murs. On appelle *chambre du système de racine* toute composante connexe de $\mathfrak{a}_{\text{reg}}$. Toute chambre est l'image par un unique élément de W de $\mathfrak{a}_+$. Pour $w \in W$, on note

$$l(w) := |\mathcal{R}^+ \cap w\mathcal{R}^-|$$

la longueur de w. C'est aussi le nombre de racines de $\mathcal{R}^+$ qui sont négatives (en tant que formes linéaires) dans $w\mathfrak{a}_+$. Une base $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ de $\mathcal{R}^+$, est par définition le sous-ensemble de $\mathcal{R}^+$ tel que pour toute racine $\alpha \in \mathcal{R}^+$, il existe des entiers positifs n_i, $i = 1, \cdots n$, tels que $\alpha = \sum_{i=1}^n n_i \alpha_i$. Les racines de la base sont appelées *racines simples*. On note $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ la base duale, définie par $< \alpha_i, \lambda_j >= \delta_{i,j}$. On appelle ses éléments les *poids fondamentaux*. Tous les poids fondamentaux appartiennent à $\partial\mathfrak{a}_+$, et engendrent les génératrices du cône $\overline{\mathfrak{a}_+}$. On note $Q^\vee = \sum_{i=1}^n \mathbb{Z}\alpha_i^\vee$ le réseau des coracines. On note $P = \sum_{i=1}^n \mathbb{Z}\lambda_i$ le *réseau des poids*. On note P^+ le sous-ensemble des poids positifs, i.e. les éléments de P qui sont dans $\overline{\mathfrak{a}_+}$, et P^{++} le sous-ensemble des poids strictement positifs, i.e. ceux qui sont dans $\mathfrak{a}_+$.

Les systèmes de racines cristallographiques ont été classifiés en types : il existe 4 familles infinies (A_n), (B_n), (C_n) et (D_n), plus un nombre fini de systèmes exceptionnels. Définissons par exemple le type A_n, qui est celui que l'on considère dans la deuxième partie de cette thèse. On note $e_1, \cdots, e_{n+1}$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. Alors A_n est un système de racine contenu dans l'hyperplan $\{x \mid < x, e_1 + \cdots e_{n+1} >= 0\}$, et est constitué des vecteurs $e_i - e_j$, pour tous les couples (i, j). On définit aussi $\mathcal{R}^+$ comme l'ensemble des vecteurs $e_i - e_j$ tels que $i < j$.

Remarque 1.1.1 Les notations introduites ici peuvent varier légèrement d'un chapitre à l'autre. Par exemple $\mathcal{R}$ peut devenir R, la dimension n de $\mathfrak{a}$ se transformer en r ou d,...

1.1.2 Théorie des fonctions hypergéométriques de Heckman et Opdam

Cette théorie (notée ensuite théorie de HO) est née à la fin des années 80 avec l'article de Heckman et Opdam [H–O]. Elle généralise l'analyse radiale classique sur les espaces symétriques riemanniens de type non compact G/K, en introduisant un paramètre k (la fonction de multiplicité) qui peut varier continuement sur $\mathbb{C}$. Dans cette thèse nous ne considérerons que le cas où k est réelle positive. Tous les espaces symétriques G/K correspondent à certaines valeurs de k entières, ou demi-entières. La théorie euclidienne usuelle correspond elle au cas $k = 0$. Mais pour des valeurs de k générales, il n'existe plus de structure de groupe sous-jacente. D'un côté cela entraîne des complications, puisque certains raisonnements sur G/K ne sont plus valides. Par exemple la formule intégrale de Harish-Chandra des fonctions sphériques n'a plus de sens. De l'autre côté la théorie de HO a apporté de nouveaux outils très puissants, comme les opérateurs de Cherednik, ou les fonctions G_λ, qui comblent généralement cette perte de structure géométrique, et simplifient même certaines preuves.

Cette théorie fait en outre partie d'une entreprise beaucoup plus vaste, visant à créer des théories de fonctions spéciales qui unifieraient de nombreuses théories géométriques classiques. Nous parlerons par exemple dans la suite de la théorie de Dunkl, qui est l'analogue de celle de HO dans un cadre plat (cf section 1.1.2). Pasquale [Pa] a aussi développé la théorie des fonctions Θ-Bessel et Θ-hypergéométriques, qui généralise la théorie sur certains espaces symétriques pseudo-riemanniens. Citons encore la théorie des (q, t)-polynômes sphériques de Macdonald [Mac1] [Mac3] qui redonne, pour certaines valeurs limites des paramètres, la plupart des familles connues de polynômes orthogonaux. Par exemple toutes les familles classiques en dimension 1, mais aussi les fonctions de Schur et de Hall-Littlewood, les polynômes sphériques sur les immeubles de type affine, ou les polynômes de Jacobi et de Heckman–Opdam. Enfin une théorie encore plus générale a été introduite par Cherednik (c.f. [C3] et les références citées), qui englobe la théorie de Dunkl (appelée rationnelle), de

HO (appelée trigonométrique), des polynômes sphériques de Macdonald, et des groupes quantiques. En guise de motivation, signalons que le développement de ces théories a déjà permis notamment de démontrer (cf [O4] [C4] [C5]) des conjectures célèbres de Macdonald [Mac4] sur les polynômes orthogonaux associés à des systèmes de racines.

Laplacien de Heckman–Opdam et opérateurs de Cherednik

On se fixe un espace euclidien $\mathfrak{a}$, muni d'un système de racines $\mathcal{R}$, et d'un système positif $\mathcal{R}^+$. On note $\mathfrak{a}_\mathbb{C} := \mathfrak{a} + i\mathfrak{a}$ sa complexification. Par définition, une fonction de multiplicité est une fonction $k : \mathcal{R} \mapsto \mathbb{R}^+$, qui est telle que $k_\alpha = k_{w\alpha}$ pour tout $\alpha \in \mathcal{R}$ et tout $w \in W$ (où l'on a noté $k_\alpha = k(\alpha)$). Le laplacien de Heckman–Opdam est défini, pour toute fonction f de classe C^2 dans $\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}}$, par

$$Lf(x) = \Delta f(x) + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} k_\alpha \coth \frac{< \alpha, x >}{2} \partial_\alpha f(x),$$

où Δ désigne le laplacien euclidien usuel. Lorsque k est égal à la fonction de multiplicité sur un espace symétrique G/K, alors L coïncide avec la partie radiale de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur cet espace. Les opérateurs de Cherednik [C1] sont définis pour $\xi \in \mathfrak{a}$, par

$$T_\xi f(x) = \partial_\xi f(x) - < \rho, \xi > f(x) + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} k_\alpha \frac{< \alpha, \xi >}{1 - e^{-<\alpha, x>}} \{f(x) - f(r_\alpha x)\},$$

où

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} k_\alpha \alpha.$$

Les propriétés fondamentales de ces opérateurs sont premièrement qu'ils commutent deux à deux, et deuxièmement qu'ils jouent le rôle de dérivées partielles pour le laplacien. Plus précisément, pour toute base orthonormale $\{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$,

$$\mathcal{L}f(x) := \sum_{i=1}^n T_{\xi_i}^2 = Lf(x) + |\rho|^2 f(x) + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} k_\alpha \frac{|\alpha|^2}{4 \sinh^2 \frac{<\alpha, x>}{2}} \{f(r_\alpha x) - f(x)\}.$$

En particulier la partie différentielle du carré des T_ξ est égale à L (à une constante près).

Fonctions hypergéométriques de Heckman–Opdam

Les fonctions F_λ : Dans leurs articles [H–O] [H] [O2], Heckman et Opdam considèrent le système, disons $\mathcal{S}$, formé de tous les opérateurs différentiels $\tilde{L}$, à coefficients dans l'algèbre engendrée par les fonctions $\frac{1}{1-e^\alpha}$, et qui commutent avec L. Ils résolvent alors la théorie spectrale associée à ces opérateurs. Plus précisément ils définissent d'abord pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}$, un certain homorphisme γ_λ (tel que $\gamma_\lambda(L) = |\lambda|^2 - |\rho|^2$), allant de l'algèbre des opérateurs de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{C}$. Puis ils trouvent une base de solutions du système

$$\tilde{L}f = \gamma_\lambda(\tilde{L})f \quad \tilde{L} \in \mathcal{S}.$$

Les fonctions de la base sont données sous forme de série de Laurent en les e^{α}. Elles sont analytiques dans $\mathfrak{a}_{\text{reg}}$, mais peuvent avoir des singularités dans les murs. Néanmoins, par des techniques de monodromie, ils trouvent que pour une combinaison linéaire bien choisie des éléments de cette base, on obtient une fonction analytique dans $\mathfrak{a}$, notée ici F_λ. Les coefficients qu'il faut choisir s'expriment à l'aide de la fonction $\mathbf{c}$ de Harish-Chandra, dont ils obtiennent au passage une formule produit explicite (cf partie 1 de cette thèse), qui généralise celle connue dans le cas des espaces symétriques (voir e.g. [Hel]). De plus ils démontrent que la fonction $(\lambda, x) \mapsto F_\lambda(x)$ est W-invariante, holomorphe en λ dans $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$, et en x dans un voisinage tubulaire de $\mathfrak{a}$. Enfin elle est déterminée de manière unique par ces conditions en plus de la normalisation $F_\lambda(0) = 1$. Notons que ces fonctions F_λ sont une généralisation des fonctions sphériques sur les espaces symétriques G/K, qui sont également fonctions propres de tous les opérateurs différentiels G-invariants.

Les fonctions G_λ : Les fonctions G_λ ont été introduites par Opdam [O1], suite à la découverte des opérateurs de Cherednik [C1]. Disons tout de suite que ces opérateurs ont révolutionné la théorie de Heckman–Opdam, et même dans une certaine mesure la théorie classique sur les espaces symmétriques G/K, développée principalement par Harish-Chandra et Helgason. Par exemple l'homomorphisme γ_λ (dit de Harish-Chandra) de la section précédente s'exprime maintenant très simplement à l'aide des T_ξ. En effet, déjà tous les opérateurs $\tilde{L}$ sont égaux à la partie différentielle de $p(T_\xi)$, pour un certain polynôme W-invariant p. On a alors la relation remarquable $\gamma_\lambda(\tilde{L}) = p(\lambda)$.

Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, la fonction G_λ est définie comme unique solution analytique du système

$$T_\xi G_\lambda(x) =< \lambda, \xi > G_\lambda(x) \quad \xi \in \mathfrak{a}, \tag{1.1}$$

satisfaisant la condition de normalisation $G_\lambda(0) = 1$. Opdam la construit en prenant un certain polynôme en les T_ξ appliqué à la fonction F_λ. Ces fonctions G_λ ont les mêmes propriétés de régularité que les F_λ, mais elles ne sont plus W-invariantes. Le lien entre les deux familles est donné par la formule

$$F_\lambda(x) = \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} G_\lambda(wx). \tag{1.2}$$

L'introduction de ces fonctions G_λ apporte elle aussi de sensibles simplifications à la théorie, y compris lorsque l'on spécialise au cas des espaces symétriques G/K. Ceci notamment parce que l'on en obtient des estimations précises beaucoup plus simplement que pour les fonctions F_λ. Mais nous reviendrons là-dessus dans la prochaine section de cette introduction.

Transformation de Fourier

Les fonctions G_λ jouent dans la théorie de HO le même rôle que le noyau exponentiel $e^{<\lambda,x>}$ dans la théorie euclidienne classique (elles sont même égales lorsque $k = 0$). En particulier on peut définir naturellement une transformation de Fourier dans la théorie de HO (qui généralise la transformation sphérique dans le cas de G/K). Celle-ci a été introduite par Opdam dans [O1], puis sous une forme légèrement différente, que nous reprenons ici, par Cherednik [C2]. Elle est définie pour f suffisament régulière par

$$\mathcal{H}(f)(\lambda) = \int_{\mathfrak{a}} f(x) G_\lambda(-x) d\mu(x),$$

où μ est la mesure définie par

$$d\mu(x) = \underbrace{\prod_{\alpha \in \mathcal{R}^+} \left| \sinh \frac{< \alpha, x >}{2} \right|^{2k_\alpha}}_{:=\delta(x)} dx.$$

La transformation de Fourier inverse est définie pour g régulière par

$$\mathcal{I}(g)(x) = \int_{i\mathfrak{a}} g(\lambda) G_\lambda(x) d\nu(\lambda),$$

où ν est la mesure de Plancherel asymétrique (c.f. [O1], ou partie 1 de cette thèse). Cette transformation a été largement étudiée par Opdam [O1] et Cherednik [C2], puis par Delorme [D]. Nous y reviendrons dans la suite.

Théorie de Dunkl

Cette théorie initiée par Dunkl [Dun], s'est développée en parallèle, et au début semble-t-il de manière indépendante. C'est l'analogue de la théorie de HO, dans un cadre plat (dit aussi parfois euclidien). Ceci dans le sens où elle se spécialise, pour certaines fonctions k, à la théorie des espaces symétriques riemanniens plats, ou de type euclidien $\mathfrak{p} \rtimes K/K$ (cf [Hel]).

Les opérateurs de Dunkl sont définis par

$$T'_\xi f(x) = \partial_\xi f(x) + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} k_\alpha \frac{< \alpha, \xi >}{< \alpha, x >} \Big\{ f(x) - f(r_\alpha x) \Big\}.$$

De même ces opérateurs commutent et la partie différentielle de leur carré est égale au laplacien de Dunkl L' défini par

$$L' f(x) = \Delta f(x) + 2 \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} k_\alpha \frac{1}{< \alpha, x >} \partial_\alpha f(x).$$

Notons que les opérateurs de Dunkl ont été découverts avant ceux de Cherednik (i.e. dans [Dun] paru en 1989). Ceci peut s'expliquer par le fait que leur définition est moins "tordue" que dans le cadre HO, où il a fallu attendre 1991 et l'article [C1] (cf aussi le livre de Heckman et Schlichtkrul [H–S], où d'autres opérateurs moins satisfaisants sont définis).

La partie analytique de la théorie a été notamment développée par Opdam [O3], De Jeu [Je1] [Je2], et Rösler [Ros1]. En particulier on peut définir le noyau de Dunkl [O3] $D(\lambda, x)$ comme solution du système

$$T'_\xi D(\lambda, x) =< \lambda, \xi > D(\lambda, x), \quad \forall \xi \in \mathfrak{a}.$$

Il existe toutefois une différence profonde avec la théorie de HO, qui est que D est symétrique en λ et x, i.e. $D(\lambda, x) = D(x, \lambda)$, pour tous $x, \lambda \in \mathfrak{a}$. Ceci entraîne que la théorie de Dunkl est parfois plus facile à étudier, comme par exemple la transformation de Dunkl (c.f. [Je1]). Néanmoins certains résultats se démontrent quand même plus simplement dans le cadre HO, puis passent au cas Dunkl en faisant "tendre la courbure vers 0". Plus précisément on a le résultat suivant, d'abord démontré par Ben Saïd et Ørsted [BS–Or] pour des valeurs de k entières, puis pour toute fonction k, par De Jeu, et enfin revisité par Rösler et Voit :

Théorème 1.1.1 (Ben Saïd-Ørsted [BS–Or], De Jeu [Je2], Rösler-Voit [Ros–Voi2]) *On a*

$$\lim_{\epsilon \to 0} G_{\epsilon^{-1}\lambda}(\epsilon z) = D(\lambda, z),$$

lorsque $\epsilon \to 0$*, uniformément en* (λ, z) *sur tout compact non vide de* $\mathfrak{a}_\mathbb{C} \times \mathfrak{a}_\mathbb{C}$.

Ce procédé permet parfois de simplifier les preuves dans la théorie de Dunkl (par exemple [Ros–Voi2] simplifie [Ros2]).

Signalons également que la partie probabiliste de la théorie s'est largement déveoloppée ces dernières années, notamment avec Rösler et Voit [Ros–Voi1], puis Gallardo et Yor [G–Y1] [G–Y2] [G–Y3], et enfin Chybiryakov [Chy1] [Chy2].

1.1.3 Immeubles affines de type $\tilde{A}_r$

La notion d'immeuble a été introduite par Tits au milieu des années 50 dans le but d'obtenir par exemple une représentation géométrique des groupes de Lie semi-simples sur un corps p-adique (cf introduction de [Ti]). Le type d'immeuble qui nous intéresse ici est celui d'immeuble affine. Un exemple est l'arbre homogène, qui correspond au cas de rang 1 (i.e. lorsque la dimension de $\mathfrak{a}$ vaut 1).

L'analyse harmonique sur les immeubles affines fut d'abord développée par Macdonald [Mac2]. Il introduit en particulier l'analogue des fonctions sphériques, appelées depuis *polynômes de Macdonald*, qu'il a ensuite défini dans un cadre plus général ([Mac1] [Mac3]). Toutefois son analyse initiale ne concerne que les immeubles construits à partir des groupes (ceux étudiés par Tits). Mais il existe d'autres immeubles, construits de façon purement géométrique. Par exemple ceux de type $\tilde{A}_2$, pour certaines valeurs du paramètre q. Il subsistait donc un trou dans l'approche de Macdonald, qui a été comblé par Parkinson dans sa thèse [Par1] [Par2] [Par3], où il traite également le cas des systèmes de racines non réduits.

Notons qu'il fut aussi précédé par Cartwright [Ca] qui étudia le type $\tilde{A}_r$. Même si c'est ce type qui nous intéresse dans cette thèse, nous reprendrons tout de même le plus souvent les notations de Parkinson.

On considère donc un espace euclidien $\mathfrak{a}$ de dimension r, muni d'un système de racines $\mathcal{R}$ de type A_r. Ici nous noterons W_0 le groupe de Weyl associé.

Groupe de Weyl affine

Une bonne référence pour les groupes de Weyl affines est [Bou]. Mais nous suivrons aussi les notations de [Par2].

Pour $\alpha \in \mathcal{R}$, et $k \in \mathbb{Z}$, soit $H_{\alpha,k} := \{x \in \mathfrak{a} \mid < x, \alpha >= k\}$. Soit $r_{\alpha,k}$ la réflexion orthogonale par rapport à $H_{\alpha,k}$, définie par

$$r_{\alpha,k}(x) = x - (< x, \alpha > -k)\alpha^\vee.$$

Soit $\tilde{\alpha} = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ la plus grande racine de $\mathcal{R}$. Soit $r_0 = r_{\tilde{\alpha},1}$. On pose aussi $r_i = r_{\alpha_i}$ pour $i = 1, \cdots, r$. Le groupe de Weyl affine W est le sous-groupe des transformations affines de $\mathfrak{a}$ engendré par les r_i pour $i = 0, 1, \cdots, n$. Il est isomorphe au produit semi-direct $W_0 \ltimes Q^\vee$, où $Q^\vee$ est identifié au sous-groupe des translations par ses éléments.

Complexe de Coxeter

Le complexe de Coxeter de W est un complexe simplicial étiqueté Σ_s. Les simplexes de dimension maximale r, appelés aussi *chambres*, sont égaux par définition à l'adhérence des composantes connexes de $\mathfrak{a}$ privé des hyperplans $H_{\alpha,k}$, pour $\alpha \in \mathcal{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$. On définit ensuite naturellement les simplexes de dimension $r-1$ comme les faces des chambres. Et ainsi de suite pour toutes les dimensions. Les points extrémaux des chambres, qui sont les simplexes de dimension 0, sont appelés *sommets* de Σ_s. Dans le cas où $\mathcal{R}$ est de type A_r, ce sont en fait tous les éléments du réseau des poids P. On a ainsi défini une structure de complexe simplicial. On attribue ensuite des étiquettes (ou types) aux sommets de la façon suivante. On définit la fonction τ sur P, par $\tau(0) = 0$, et $\tau(w\lambda_i) = i$, pour tout $w \in W$ et $i = 1, \cdots, r$. Un sommet x est alors dit de type i, si $\tau(x) = i$. On dit que deux chambres C et C' sont adjacentes, lorsqu'elles sont distinctes et ont une face en commun. On notera dans ce cas $C \sim_i C'$, si le seul sommet de C qui n'est pas commun à C' est de type i. On notera aussi

$$C_0 = \{x \in \mathfrak{a} \mid < \alpha_i, x > \geq 0 \text{ pour } i = 1, \cdots, r \text{ et } < \tilde{\alpha}, x > \leq 1\},$$

la *chambre fondamentale.*

Remarque 1.1.2 On peut également définir le complexe de Coxeter de W lorsque celui-ci est un groupe de Weyl non affine, ou même un groupe de Coxeter général, y compris infini (c.f. e.g. [Par1]).

Soient maintenant deux complexes simpliciaux étiquetés. On appelle *isomorphisme* entre ces deux complexes, toute bijection de l'ensemble des sommets de l'un vers ceux de l'autre, qui envoie tout simplexe de dimension $d \leq r$ sur un simplexe de dimension d, tel que si C et C' sont deux chambres adjacentes, alors leurs images aussi, et qui préserve le type, i.e. si x est un sommet de type i alors son image aussi.

Groupe de Weyl affine étendu

Le *groupe de Weyl affine étendu* $\widetilde{W}$ est défini par $\widetilde{W} = W_0 \rtimes P$, où le réseau des poids P est identifié au sous-groupe des translations par ses éléments. On a $\widetilde{W} = W \rtimes G$, où $G \simeq P/Q^\vee$ est le sous-groupe de $\widetilde{W}$ qui laisse fixe C_0. Pour le cas A_r, G agit par permutation sur les sommets de C_0. Plus précisément il est cyclique d'ordre $r+1$ et engendré par la permutation $(0, 1, \cdots, r)$.

Remarquons que $\widetilde{W}$ agit sur le complexe simplicial Σ_s, i.e. il envoie tout simplexe sur un simplexe de même dimension, mais il ne préserve pas nécessairement le type des sommets. Nous dirons que ses éléments sont des automorphismes de *type rotatif*. Plus généralement nous dirons qu'un isomorphisme Ψ entre un complexe étiqueté et Σ_s est de type rotatif, s'il existe un isomorphisme Φ entre ces deux complexes et $w \in \widetilde{W}$, tel que $\Psi = w \circ \Phi$.

Etant donné un entier q, nous pouvons définir q_w pour tout $w \in \widetilde{W}$. Pour simplifier nous ne le ferons que dans le cas où $\mathcal{R}$ est de type A_r. Supposons pour commencer que $w \in W$ et qu'il est de longueur l, i.e. il existe $i_1, \cdots, i_l$ tels que $w = s_{i_1} \cdots s_{i_l}$, et w n'admet pas de telle décomposition de longueur plus petite. Dans ce cas nous posons $q_w = q^l$. Maintenant si $w \in \widetilde{W}$ s'écrit $w = w'g$, avec $w' \in W$ et $g \in G$, alors nous posons $q_w = q_{w'}$. Pour $\lambda \in P$, notons $t_\lambda \in \widetilde{W}$ la translation de vecteur λ. Alors (c.f. e.g. [Par1])

$$q_{t_\lambda} = q^{\sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} <\lambda, \alpha>}.$$

Immeuble affine

Soit W un groupe de Coxeter. On peut le supposer quelconque, même infini, mais le cas qui nous intéressera dans la suite sera celui où W est un groupe de Weyl affine. La définition suivante est adaptée de [Bro] :

Définition 1.1.1 *Un immeuble de type W est un complexe simplicial étiqueté non vide qui contient une famille de sous-complexes, appelés appartements, qui satisfont les conditions suivantes :*

(i) Tout appartement est isomorphe au complexe de Coxeter de W.

(ii) Etant donné deux chambres, il existe un appartement les contenant toutes les deux.

(iii) Etant donné deux appartements A et A' qui ont une chambre en commun, il existe un unique isomorphisme $\Phi : A \to A'$ qui fixe $A \cap A'$ ponctuellement.

On dit que l'immeuble est affine, si W est un groupe de Weyl affine (on dit qu'il est sphérique si W est un groupe de Weyl non affine). A partir de maintenant nous considérons un immeuble affine $\mathcal{X}$ de type $\tilde{A}_r$, i.e. de type W, où W est le groupe de Weyl affine associé au système de racines A_r. On supposera en plus qu'il est *régulier*, c'est-à-dire que le cardinal de l'ensemble des chambres D telles que $D \sim_i C$, est indépendant de la chambre C et de i. On note ce cardinal q, et on l'appelle le paramètre de l'immeuble. Par exemple, si $r = 1$, alors c'est un arbre homogène à $q + 1$ branches.

Pour ces rappels nous noterons aussi $V_{\mathcal{X}}$ l'ensemble des sommets de $\mathcal{X}$. Toutefois dans la deuxième partie de cette thèse $\mathcal{X}$ sera l'ensemble des sommets. Etant donné $x \in V_{\mathcal{X}}$ et $\lambda \in P^+$, soit $V_\lambda(x)$ l'ensemble des sommets y de $\mathcal{X}$, tels qu'il existe un appartement A contenant x et y, et un isomorphisme de type rotatif Ψ entre A et Σ_s, tel que $\Psi(x) = 0$ et $\Psi(y) = \lambda$. On appelle $V_\lambda(x)$ la sphère de centre x et de rayon λ. On se fixe maintenant un sommet $0 \in V_{\mathcal{X}}$ de type 0, qui sera pris comme origine. Si $x \in V_\lambda(0)$, on dira que λ est la *partie radiale*, ou coordonnée, de x, et l'on pose $\overline{x} = \lambda$. On note N_λ le cardinal de $V_\lambda(x)$, qui est indépendant de x. On a la formule [Par2]

$$N_\lambda = \frac{W_0(q^{-1})}{W_{0\lambda}(q^{-1})} q_{t_\lambda},$$

où $W_{0\lambda}$ est le stabilisateur de λ sous l'action de W_0, et où $V(q^{-1}) = \sum_{w \in V} q_w^{-1}$ pour tout sous-groupe V de W_0.

Polynômes symétriques de Macdonald

Les polynômes symétriques de Macdonald sont définis pour $z \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ par

$$P_\lambda(z) = \frac{q_{t_\lambda}^{-\frac{1}{2}}}{W_0(q^{-1})} \sum_{w \in W_0} \mathbf{c}(w^{-1}z) e^{<w\lambda, z>},$$

où la fonction $\mathbf{c}$ est définie par

$$\mathbf{c}(z) = \prod_{\alpha \in \mathcal{R}^+} \frac{1 - q^{-1} e^{-<\alpha^\vee, z>}}{1 - e^{-<\alpha^\vee, z>}}.$$

Si le système de racine est de type A_r, on a en outre pour tout $i = 1, \ldots, r$,

$$P_{\lambda_i}(z) = \frac{q_{t_{\lambda_i}}^{-\frac{1}{2}} W_{0\lambda_i}(q^{-1})}{W_0(q^{-1})} \sum_{\lambda \in W_0 \lambda_i} e^{<\lambda, z>}.$$

La fonction F_0 est définie sur P par

$$F_0(\lambda) = P_\lambda(0).$$

En particulier $F_0(0) = 1$ (cf [Par1]).

Opérateurs de moyenne et leur transformée de Fourier

Pour $\lambda \in P^+$, on note A_λ l'opérateur de moyenne défini par

$$A_\lambda f(x) = \frac{1}{N_\lambda} \sum_{y \in V_\lambda(x)} f(y),$$

pour toute fonction f de $V_{\mathcal{X}}$ dans $\mathbb{C}$, et tout $x \in V_{\mathcal{X}}$. On note $\mathcal{A}$ l'algèbre engendrée par ces opérateurs. Parkinson ([Par1], théorème 3.22) a montré que F_0 est une fonction propre de tous les éléments de $\mathcal{A}$. En particulier, pour $i = 1, \cdots, r$, on a

$$A_{\lambda_i} F_0 = \frac{q_{t_{\lambda_i}}^{\frac{1}{2}} |W_0 \lambda_i|}{N_{\lambda_i}} F_0. \tag{1.3}$$

On munit $l^2(V_{\mathcal{X}})$ du produit scalaire usuel

$$< f, g >= \sum_{x \in V_{\mathcal{X}}} f(x) \overline{g}(x).$$

On note δ_x la fonction caractéristique en un sommet x. On définit un produit scalaire sur $\mathcal{A}$ par

$$< A, B >=< A\delta_0, B\delta_0 > .$$

On note

$$U = \{\theta \in \mathfrak{a} \mid \forall \alpha \in \mathcal{R}^+, \ < \alpha, \theta > \leq \pi\}.$$

La transformée de Fourier de A_λ est définie pour $\theta \in U$ par

$$\widehat{A}_\lambda(i\theta) = P_\lambda(i\theta).$$

On peut ensuite étendre l'application $A \mapsto \widehat{A}(i\theta)$ en un homomorphisme d'algèbre de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{C}$, pour tout $\theta \in U$. On a alors la formule de Plancherel (cf [Par1]) :

$$< A, B >= \frac{W_0(q^{-1})}{|W_0|} \int_U \widehat{A}(i\theta) \overline{\widehat{B}(i\theta)} \frac{d\theta}{|\mathbf{c}(i\theta)|^2},$$

et la formule d'inversion

$$(A\delta_y)(x) = \frac{W_0(q^{-1})}{|W_0|} \int_U \widehat{A}(i\theta) \overline{P_\lambda(i\theta)} \frac{d\theta}{|\mathbf{c}(i\theta)|^2}, \tag{1.4}$$

pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tout $y \in V_\lambda(x)$.

Remarque 1.1.3 Par souci de simplicité, nous avons choisi de faire cette présentation en restant à un niveau aussi élémentaire que possible, en particulier sans rentrer dans le formalisme des C^*-algèbres, et sans parler de l'isomorphisme de Gelfand $A \mapsto \widehat{A}$. Le lecteur interessé pourra se référer à l'article beaucoup plus complet [Par1].

Marches aléatoires

Une marche aléatoire symétrique sur $V_{\mathcal{X}}$ est une chaîne de Markov $(X_n, n \geq 0)$, dont l'opérateur de transition est de la forme

$$A = \sum_{\lambda \in P^+} a_\lambda A_\lambda,$$

où $a_\lambda \geq 0$ pour tout λ, et $\sum_{\lambda \in P^+} a_\lambda = 1$. On a alors

$$Af(x) = \sum_{y \in V_{\mathcal{X}}} p(x,y) f(y),$$

où $p(x,y)$ est le *noyau de transition*, ou *noyau de la chaleur*. Autrement dit

$$p(x,y) = (A\delta_y)(x).$$

On définit de même les convolées n fois du noyau de transition par

$$A^n f(x) = \sum_{y \in V_{\mathcal{X}}} p^n(x,y) f(y),$$

ou par

$$p^n(x,y) = (A^n \delta_y)(x).$$

On a donc d'après (1.4)

$$p^n(x,y) = \frac{W_0(q^{-1})}{|W_0|} \int_U \widehat{A}(i\theta)^n \overline{P_\lambda(i\theta)} \frac{d\theta}{|\mathbf{c}(i\theta)|^2}, \tag{1.5}$$

pour tout $y \in V_\lambda(x)$. La partie radiale $(\overline{X_n}, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov sur P^+, appelée *marche aléatoire radiale*. Par définition, le *générateur* d'une chaîne de Markov d'opérateur de transition A, est $A - \mathrm{Id}$, où Id est l'opérateur identité.

Dans cette thèse nous ne considérerons que des marches aléatoires au plus proche voisin, c'est-à-dire telles que $a_\lambda = 0$, si λ n'est pas un poids fondamental. Dans ce cas nous notons

$$\tilde{\rho} = \widehat{A}(0) = \sum_{i=1}^{r} a_{\lambda_i} \frac{q_{t_{\lambda_i}}^{\frac{1}{2}} |W_0 \lambda_i|}{N_{\lambda_i}},$$

le *rayon spectral* de la marche aléatoire.

La F_0-marche aléatoire est la chaîne de Markov sur $V_{\mathcal{X}}$ dont le noyau de transition q est donné par

$$q(x,y) = p(x,y) \frac{F_0(\overline{y})}{F_0(\overline{x})} \tilde{\rho}^{-1},$$

pour tous $x, y \in V_{\mathcal{X}}$. Notons que d'après (1.3), on a bien $\sum_{y \in V_{\mathcal{X}}} q(x,y) = 1$, pour tout $x \in V_{\mathcal{X}}$.

Un exemple qui sera particulièrement étudié dans cette thèse est la *marche aléatoire simple*. Elle correspond au cas où

$$a_{\lambda_i} = \frac{q_{t_{\lambda_i}}^{-\frac{1}{2}} N_{\lambda_i}}{\sum_{j=1}^{r} q_{t_{\lambda_j}}^{-\frac{1}{2}} N_{\lambda_j}}.$$

1.2 Principaux résultats obtenus

1.2.1 Première partie : théorie de Heckman–Opdam

Notre premier résultat est une estimation précise des fonctions F_λ et G_λ. Cette question est centrale dans l'étude de la transformée de Fourier. Dans le cas des espaces symétriques déjà (puis celui des groupes de Lie réductifs réels), Harish-Chandra [HaCh1] [HaCh2] [HaCh3] a développé toute une artillerie très compliquée (terme constant, principe de descente,...) pour obtenir de bonnes estimations des fonctions sphériques, et ainsi une formule de Plancherel et des théorèmes d'inversion. Gangolli et Varadarajan [Gan–Var] ont ensuite obtenu des estimations légèrement plus précises avec la théorie des équations différentielles à points singuliers-réguliers, mise au point par Deligne [Del].

Dans le cadre de la théorie de HO, les premières estimations ont été obtenues par Opdam [O1] en 95 :

$$|G_\lambda(x)| \leq C e^{\max_{w\in W} <\Re\lambda, wx>},$$

pour tous $x \in \mathfrak{a}$ et $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$, où $\Re\lambda$ désigne la partie réelle de λ. Remarquons que d'après (1.2), les mêmes estimations pour les F_λ s'en déduisent immédiatement. Cette estimation est suffisante pour obtenir la formule de Plancherel [O1], ainsi que le théorème de Paley-Wiener [O1] [C2], mais elle ne permet pas d'obtenir la formule d'inversion sur l'espace de Schwartz. La preuve de Opdam est très élémentaire, et similaire à celle de De Jeu [Je1] dans le cadre Dunkl. Elle consiste à utiliser de manière astucieuse le système d'équations différentielles (1.1), ainsi que le principe complètement trivial suivant : toute fonction décroissante sur $\mathbb{R}^+$ est majorée par sa valeur en 0.

Le théorème d'inversion sur l'espace de Schwartz des fonctions W-invariantes a ensuite été obtenu par Delorme [D] en 99, qui démontre des estimations beaucoup plus fines des fonctions F_λ et G_λ en adaptant les techniques de Harish-Chandra.

Dans cette thèse nous avons repris les idées des preuves de Opdam et De Jeu, pour obtenir l'estimation suivante, qui généralise celle de Gangolli et Varadarajan :

Théorème 1.2.1 *Soient p et q deux polynômes. Il existe une constante $C > 0$, telle que*

$$\left| p(\frac{\partial}{\partial x}) q(\frac{\partial}{\partial \lambda}) G_\lambda(x) \right| \leq C(1+|\lambda|)^{deg\ p}(1+|x|)^{|\mathcal{R}^+|+deg\ q} e^{-<\rho,x^+>+\max_{w\in W}<\Re\lambda,wx>},$$

pour tous $x \in \mathfrak{a}$ et $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$, où x^+ est l'unique élément de $W_0 \cdot x$ appartenant à $\overline{\mathfrak{a}_+}$.

Ce résultat est légèrement plus précis que celui obtenu par Delorme, qui n'avait pas de renseignement sur les degrés des polynômes en x et λ du majorant. Néanmoins cela n'a pas d'importance pour démontrer le théorème d'inversion sur l'espace de Schwartz.

Notons que ce résultat est essentiellement optimal dans le cas euclidien classique, soit lorsque $k = 0$. Ceci dans le sens où la puissance des polynômes en x et λ du majorant ne peut pas être améliorée. Mais il ne l'est pas pour toutes les valeurs de k. Par exemple, pour les espaces symétriques complexes (correspondant à $k = 1$), Cowling et Nevo [Cow–Nev] obtiennent une majoration plus fine loin des murs, avec une décroissance polynômiale supplémentaire.

Comme nous le précisions Delorme a obtenu l'inversion sur l'espace de Schwartz pour les fonctions W-invariantes, en fait y compris dans le cas beaucoup plus difficile où $k < 0$. Pour le cas $k \geq 0$, nous avons repris la méthode de Anker [A2] et démontré le résultat dans le cas non W-invariant :

Théorème 1.2.2 *La transformée de Fourier $\mathcal{H}$ réalise un isomorphisme entre $\mathcal{C}(\mathfrak{a})$ et $\mathcal{S}(i\mathfrak{a})$.*

L'espace $\mathcal{C}(\mathfrak{a})$ est l'espace de Schwartz sur $\mathfrak{a}$ adapté à la mesure μ (cf partie 1), et $\mathcal{S}(i\mathfrak{a})$ est l'espace de Schwartz usuel sur $i\mathfrak{a}$.

Ce dernier théorème nous a alors permis d'appliquer le théorème de Hille-Yosida pour montrer que l'opérateur

$$\mathcal{D} := \frac{1}{2}(\mathcal{L} - |\rho|^2),$$

est le générateur d'un semigroupe de Feller $(P_t, t \geq 0)$. De même sa partie différentielle D est le générateur d'un autre semigroupe de Feller noté $(P_t^W, t \geq 0)$. Ces semigroupes définissent des processus de Feller. Le premier, $(X_t, t \geq 0)$, est à trajectoires discontinues (mais càdlàg : les trajectoires sont continues à droite avec une limite à gauche), et peut sauter d'une chambre à l'autre, mais à chaque fois, seulement entre deux points qui sont images l'un de l'autre par une réflexion r_α de W. Le second $(X_t^W, t \geq 0)$ est à trajectoires continues dans la chambre de Weyl $\overline{\mathfrak{a}_+}$. C'est l'analogue de ce qu'avaient obtenu Rösler et Voit dans le cadre Dunkl [Ros–Voi1]. Nous avons alors repris certaines techniques utilisées par Gallardo et Yor [G–Y1] [G–Y2] [G–Y3] ainsi que certains résultats de Chybiryakov [Chy1] [Chy2], pour faire une étude détaillée de ces processus. En particulier nous avons obtenu la décomposition en semimartingale de $(X_t^W, t \geq 0)$ partant de n'importe quel point de $\overline{\mathfrak{a}_+}$:

Proposition 1.2.1 *Le processus $(X_t^W, t \geq 0)$ est solution de l'EDS*

$$X_t^W = X_0 + \beta_t + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} k_\alpha \alpha \int_0^t \coth \frac{< \alpha, X_s^W >}{2} \, ds,$$

où $(\beta_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien standard.

Précisons que ce résultat ne découle pas de théorèmes généraux standards, puisque les coefficients du drift sont des fonctions singulières sur les murs. Pour le démontrer nous avons en fait utilisé la théorie des formes de Dirichlet et le livre [Fu–Osh–Ta] (cf chapitre 3 pour plus de détails). Cette théorie s'applique d'ailleurs également très bien dans le cadre Dunkl, et nous avons donc obtenu l'analogue de la proposition 1.2.1 dans ce cadre. Chybiryakov a démontré en même temps le même résultat dans le cas Dunkl, en utilisant des techniques de calcul stochastique [Chy2].

Cette proposition nous a ensuite permis de déduire la loi des grands nombres et le théorème central limite :

Proposition 1.2.2 *Lorsque $T \to \infty$,*

$$\frac{X_t^W}{t} \to \rho, \ \ p.s.,$$

et

$$\left(\frac{X_{tT}^W - \rho tT}{\sqrt{T}}, t \geq 0\right) \to (\beta_t, t \geq 0),$$

en distribution dans $C(\mathbb{R}^+, \overline{\mathfrak{a}_+})$.

Dans le cas des espaces symétriques c'est une partie d'un résultat démontré par Babillot [Ba], mais par d'autres méthodes, spécifiques au cas des groupes.

Nous avons ensuite voulu généraliser certains résultats obtenus par Anker, Bougerol et Jeulin [A–B–J] dans le cas des espaces symétriques. En particulier comme nous l'avons déjà mentionné, nous avons démontré le théorème 1.0.1 pour tous les processus $(X_t^W, t \geq 0)$, i.e. pour tous $k > 0$. Nous avons aussi obtenu un résultat analogue pour $(X_t, t \geq 0)$. Le processus limite n'est alors plus exactement le mouvement brownien intrinsèque, mais un processus qui part de 0, puis qui choisit aléatoirement une chambre (avec chance égale pour chaque chambre), et alors se propage dans cette chambre comme le mouvement brownien intrinsèque. Pour une définition ainsi qu'une présentation générale du MB intrinsèque nous renvoyons le lecteur aux chapitres 3 et 5 de cette thèse. L'outil principal pour démontrer le théorème 1.0.1, est une estimation précise de la fonction F_0 :

Théorème 1.2.3 *Il existe une constante $K > 0$ telle que*

$$0 \leq E[\log \delta^{\frac{1}{2}} F_0](x) \leq K,$$

pour tous $x \in \overline{\mathfrak{a}_+}$, où E est l'opérateur d'Euler défini par $Ef(x) =< x, \nabla f(x) >$ pour toute fonction f.

C'est déjà cette estimation qui était cruciale dans [A–B–J]. La preuve du théorème 1.2.3 dans [A–B–J] utilisait les techniques compliquées de Harish-Chandra. Notre preuve est complètement différente et en un sens plus élémentaire. Elle exploite la découverte par Opdam de la fonction G_0 ainsi que des estimations précises de cette fonction et de la fonction F_0 :

Théorème 1.2.4 *Dans $\overline{\mathfrak{a}_+}$,*

$$F_0(x) \asymp^1 \left[\prod_{\alpha \in \mathcal{R}_0^+} < \alpha, x > \right] e^{-<\rho,x>},$$

et pour tout $w \in W$,

$$G_0(wx) \asymp \left[\prod_{\alpha \in \mathcal{R}_0^+ \cap w^{-1}\mathcal{R}_0^+} < \alpha, x > \right] e^{-<\rho,x>}.$$

L'estimation de F_0 obtenue généralise celle de Anker dans les espaces symétriques [A1]. Le principe de la preuve est d'utiliser le développement en série de Laurent des fonctions F_0 et G_0, puis d'estimer les coefficients de ce développement pour récupérer des estimations de F_0 ou G_0 loin des murs. Pour la fonction F_0 cela ne pose pas trop de problème puisqu'il suffit d'avoir une estimation du coefficient du terme de plus haut degré. En revanche pour la fonction G_0, c'est plus compliqué, d'une part parce qu'elle a un développement en série différent dans chaque chambre, et d'autre part parce qu'il faut obtenir des estimations précises de tous les coefficients du développement. On y arrive tout de même par une double récurrence, d'abord sur le degré des coefficients, puis sur la distance entre la chambre considérée et la chambre négative $-\mathfrak{a}_+$. La récurrence s'appuie sur les equations (1.1) ainsi que des relations remarquables satisfaites par les polynômes

$$\pi^I(x) = \prod_{\alpha \in I} < \alpha^\vee, x >,$$

pour I sous-ensemble de $\mathcal{R}^+$, et leurs dérivées. En utilisant alors un principe du maximum, on obtient les estimations souhaitées des coefficients. La dernière étape consiste à utiliser un principe de Harnack local pour étendre les estimations près des murs. Là encore, c'est plus simple pour la fonction F_0.

1.2.2 Deuxième partie : les immeubles affines

Dans la deuxième partie nous obtenons d'abord, au chapitre 4, des estimations (presque) optimales du noyau de la chaleur pour la marche aléatoire simple sur un immeuble affine de type $\tilde{A}_r$. Elles sont en fait optimales dans le cas de l'arbre et le cas $\tilde{A}_2$. Pour $r \geq 3$, il manque simplement la borne inférieure, à distance finie du bord du domaine. Néanmoins c'est largement suffisant pour en déduire ensuite des estimations optimales de la fonction de Green. Ceci a fait l'objet d'un travail en commun avec Jean-Philippe Anker et Bartosz Trojan. Au chapitre 5, nous démontrons le théorème 1.0.1 pour la marche aléatoire simple. Nous obtenons également une version légèrement plus faible pour toutes les marches aléatoires symétriques au plus proche voisin. Il faut alors renormaliser le point de départ de

[1] on note $f \asymp g$ s'il existe des constantes $c > 0$ et $C > 0$ telles que $c \leq \frac{f}{g} \leq C$.

façon à ce qu'elles convergent vers le MB intrinsèque partant d'un point intérieur (i.e. dans $\mathfrak{a}_+$). Il s'avère que c'est beaucoup plus simple à prouver, que partant de 0, puisque cela ne nécessite plus d'avoir d'estimations du noyau de transition.

Pour commencer, rappelons l'estimation du noyau de la chaleur sur les espaces symétriques G/K. Pour simplifier nous ne donnons le résultat que lorsque le système de racines associé est réduit :

Théorème 1.2.5 (Anker-Ji 99**, Anker-Ostellari** 03**)** *On a*

$$p_t(0,x) \asymp t^{-\frac{\gamma}{2}} F_0(x) \left\{ \prod_{\alpha\in\mathcal{R}^+} (1+t+<\alpha,x>)^{k_\alpha - 1} \right\} e^{-\frac{|\rho|^2}{2}t - \frac{|x|^2}{2t}},$$

pour tous $x \in \overline{\mathfrak{a}_+}$, et tous $t > 0$, où $\gamma = r + 2\sum_{\alpha\in\mathcal{R}^+} k_\alpha$.

Anker et Ji [A–Ji] ont d'abord obtenu l'estimation du théorème pour $x \in \overline{\mathfrak{a}_+}$ et $t > 0$ tels que $|x| \leq \mathrm{const}(1+t)$, ce qui était suffisant pour en déduire des estimations de la fonction de Green (voir plus bas). Le théorème a ensuite été complètement démontré par Anker et Ostellari [A–Ost1] [A–Ost2]. Au passage, nous avons vérifié que leur preuve s'étend sans problème au cadre Heckman–Opdam (cf chapitre 2 de cette thèse). Signalons aussi à titre de comparaison, l'expression du noyau de la chaleur sur l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^r$: $p_t(0,x) = (2\pi t)^{-\frac{r}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{2t}}$.

Revenons maintenant au cas des immeubles. Les précédentes estimations connues de $p^n(0,x)$ pour des immeubles affines généraux, remontent à l'article [Par4] qui donne un théorème central limite local. C'est à dire une asymptotique de $p^n(0,x)$ lorsque n tend vers l'infini, mais à x fixé :

Théorème 1.2.6 (Parkinson 05**)** *Soit A l'opérateur de transition d'une marche aléatoire symétrique sur un immeuble affine. Alors pour tout $x \in V_{\mathcal{X}}$,*

$$p^n(0,x) \sim const \cdot F_0(\overline{x}) \widehat{A}(0)^n \frac{1}{n^{|\mathcal{R}^+| + \frac{r}{2}}},$$

lorsque $n \to \infty$.

Parkinson démontre ce théorème pour n'importe quelle marche aléatoire symétrique sur n'importe quel immeuble affine (non nécessairement de type $\tilde{A}_r$). Il donne également une formule explicite pour la constante qui apparaît dans l'équivalent. Par contre ce résultat n'est pas du tout uniforme en x.

En fait la seule estimation uniforme connue, a été démontrée par Lalley [Lal1] [Lal2] dans le cas des arbres homogènes, soit pour $r = 1$. Il donne une estimation optimale de $p^n(0,x)$ uniforme pour tous x et n tels que $|x| \leq n$. Bien sûr c'est le mieux que l'on puisse faire, puisque lorsque $|x| > n$, $p^n(0,x) = 0$. Son résultat est également valide pour toutes les marches aléatoires symétriques. Néanmoins sa preuve devient assez elliptique et difficile à suivre, lorsque x est dans la zone $|x| \geq n^{1-\epsilon}$. Sa démonstration a ensuite été reprise par Woess [Wo], qui se limite toutefois au domaine $|x| \leq (1-\epsilon)n$.

Avant d'énoncer notre résultat, précisons encore quelques notations. Notons A l'opérateur de transition de la marche aléatoire simple, et $\tilde{\rho} = \widehat{A}(0)$ le rayon spectral associé. Pour $x \in V_\lambda(0)$ et $n \geq 0$, soit $\delta = \frac{\lambda + \sum_{i=1}^r \lambda_i}{n+r}$. Soit h la fonction définie sur $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$ par

$$h(z) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{\lambda \in W_0\lambda_i} e^{<\lambda,z>},$$

et $\tilde{h} = \frac{h}{h(0)}$. Soit ϕ la fonction définie par

$$\phi(\delta) = \min\{u \in \overline{\mathfrak{a}_+} \mid \log \tilde{h}(u) - < u, \delta >\}.$$

Alors nous obtenons

Théorème 1.2.7 *Il existe une constante $K > 0$, telle que dans l'ensemble $\{|x| \leq n - K\}$,*

$$p^n(0,x) \asymp \frac{1}{n^{|R^+| + \frac{r}{2}}} \tilde{\rho}^n e^{n\phi(\delta)} F_0(\overline{x}) \frac{1}{\sqrt{\prod_{\alpha \in R^+}(1 - < \alpha, \delta >)}}. \tag{1.6}$$

De plus la majoration par le membre de droite a lieu dans tout le domaine $\{|x| < n\}$.

Par ailleurs pour les immeubles de type $\tilde{A}_2$, ou pour les arbres, nous montrons que l'estimation (1.6) est valable dans tout l'ensemble $\{|x| < n\}$. Dans le cas des arbres, c'est essentiellement le même résultat que celui de Lalley [Lal1]. Cependant nous donnons en plus une formule explicite de la fonction ϕ :

$$\phi(\delta) = -\frac{1}{2}\left\{(1-\delta)\log(1-\delta) + (1+\delta)\log(1+\delta)\right\}.$$

C'est un petit raffinement supplémentaire par rapport au résultat de Lalley, dans le cas de la marche simple. En outre notre preuve, spécialisée au cas des arbres, est plus simple que la sienne. En effet, pour sa part il utitise deux preuves bien distinctes, suivant que $|x| \leq n^{1-\epsilon}$, ou pas, dont un argument probabiliste assez compliqué pour traiter le cas $|x| \geq n^{1-\epsilon}$. Alors que nous obtenons une preuve directe de l'estimation dans tout l'ensemble $\{|x| \leq n - K\}$ pour une certaine constante $K > 0$. Dans le cas des arbres, il devient ensuite complètement élémentaire d'étendre l'estimation au bord du domaine par un argument combinatoire.

Il peut être intéressant de comparer les estimations sur les espaces symétriques et sur les immeubles. Pour y voir plus clair, prenons l'exemple des espaces symétiques complexes, pour lesquels $k_\alpha = 1$, pour tout $\alpha \in \mathcal{R}^+$. Dans ce cas les deux estimations, respectivement pour les espaces symétriques G/K et les immeubles, sont très proches : on trouve la même puissance de t ou de n, la fonction F_0, les termes correspondant au trou spectral $e^{-\frac{|\rho|^2}{2}t}$ et $\tilde{\rho}^n$, ainsi que les termes gaussiens $e^{-\frac{|x|^2}{2t}}$ et $e^{n\phi(\delta)}$. Par contre dans le cas des immeubles on trouve un terme de bord supplémentaire : $\prod_{\alpha\in\mathbb{R}^+}(1-<\alpha,\delta>)^{-1/2}$. Cela est dû simplement au fait que le noyau de transition p^n est à support fini.

Donnons maintenant le schéma de la preuve, sans trop rentrer dans les détails techniques. Elle se divise essentiellement en deux étapes. Le point de départ est d'utiliser la formule d'inversion de Fourier (1.5) du noyau de transition. Ensuite par W_0-invariance, on peut remplacer le terme $\overline{P_\lambda(i\theta)}/|\mathbf{c}(i\theta)|^2$ dans la formule, par $\mathbf{c}(i\theta)^{-1}e^{-i<\lambda,\theta>}$. La première étape consiste alors à faire une intégration par partie, pour faire disparaître la fonction $\mathbf{c}$ de la formule, et faire sortir le terme $F_0(\overline{x})n^{-|\mathcal{R}^+|}$ de l'intégrale. Pour cela on utilise l'identité remarquable

$$\pi(\partial)[h^{n+|\mathcal{R}^+|}] = (n+|\mathcal{R}^+|)\cdots(n+1)r_n(h)h^n\Delta,$$

où r_n est un certain polynôme possédant de "bonnes" propriétés, $\pi=\prod_{\alpha\in\mathcal{R}^+}\alpha^\vee$, et $\Delta = \prod_{\alpha\in\mathcal{R}^+}(e^{\frac{\alpha^\vee}{2}}-e^{-\frac{\alpha^\vee}{2}})$. C'est pour obtenir cette formule que l'on a besoin de se restreindre au cas particulier de $\tilde{A}_r$, et de la marche simple. L'idée de cette étape est inspirée de la preuve dans le cas des espaces symétriques [A–Ji]. Dans ce cadre, l'identité utilisée était

$$\pi(\partial)[e^{-|x|^2}] = \text{const}\cdot\pi(x)e^{-|x|^2}.$$

La deuxième étape est de faire un changement du contour d'intégration, ou plutôt un changement de variable $i\theta\mapsto i\theta+s$. Le point s est choisi suivant la méthode de la phase stationnaire, ou méthode de Laplace. Toute l'intégrale se concentre alors autour de l'origine, et il suffit ensuite de faire un changement de variable adéquat, pour obtenir l'estimation souhaitée.

Le deuxième résultat du chapitre 4 est une estimation de la fonction de Green. La preuve résulte relativement aisément, à quelques points techniques près, de celle du noyau de la chaleur. La fonction de Green est définie pour $x\in V_{\mathcal{X}}$ et $z\in[0,\tilde{\rho}^{-1}]$, par

$$G(x,z)=\sum_{n\geq|x|}p^n(0,x)z^n.$$

Nous obtenons

Théorème 1.2.8 *1. Si $z\in(0,\tilde{\rho}^{-1})$, alors*

$$G(x,z)\asymp\frac{1}{|x|^{|R^+|+\frac{r-1}{2}}}e^{-<\overline{x},s_0>}F_0(\overline{x}),$$

pour tous $x\in V_{\mathcal{X}}$, où $s_0\in\overline{\mathfrak{a}_+}$ est uniquement déterminé par la condition : $h(s_0)=(\rho z)^{-1}$ et $\nabla h(s_0)$ est proportionnel à $\overline{x}$.

2. *On a*

$$G(x,\tilde{\rho}^{-1}) \asymp \frac{1}{|x|^{2|R^+|+r-2}} F_0(\overline{x}),$$

pour tous $x \in V_{\mathcal{X}}$.

En revanche cette estimation est très similaire à celle sur les espaces symétriques obtenue par Anker et Ji [A–Ji]. En particulier les effets de bord ne sont plus visibles. Plus précisément, la fonction de Green sur les espaces symétriques est définie pour $x \in \overline{\mathfrak{a}_+}$ et $z \in [0, \frac{|\rho|^2}{2}]$, par

$$G(x,z) = \int_0^{+\infty} p_t(0,x) e^{tz} dt.$$

Théorème 1.2.9 (Anker-Ji 99**)** 1. *Si $z \in (0, \frac{|\rho|^2}{2})$, alors*

$$G(x,z) \asymp \frac{1}{|x|^{|R^+|+\frac{r-1}{2}}} e^{-c|x|} F_0(x),$$

pour tous $x \in \overline{\mathfrak{a}_+}$, où c est une certaine constante dépendant de z.

2. *On a*

$$G(x, \frac{|\rho|^2}{2}) \asymp \frac{1}{|x|^{2|R^+|+r-2}} F_0(x),$$

pour tous $x \in \overline{\mathfrak{a}_+}$.

Comme annoncé plus haut, nous démontrons ensuite, dans le chapitre 5, le théorème 1.0.1, essentiellement pour la marche simple. La preuve résulte de nos estimations du noyau de la chaleur, ainsi que d'un résultat combinatoire (proposition 1.2.3 ci-dessous), qui peut être intéressant en lui-même. On trouve un calcul un peu similaire dans [Ca–Wo] pour le cas $\tilde{A}_r$ et dans la thèse de Parkinson [Par2] pour tous les immeubles de rang 2.

Proposition 1.2.3 *Pour tout $\lambda \in P^{++}$, tout sommet $x_\lambda \in V_\lambda(0)$, tout $w \in W_0$ et tout $i \in \{1, \dots, r\}$,*

$$|V_{\lambda+w\lambda_i}(0) \cap V_{\lambda_i}(x_\lambda)| = q_{t_{\lambda_i}}^{\frac{1}{2}} q_{t_{w\lambda_i}}^{\frac{1}{2}}.$$

Ce résultat permet de déduire une expression explicite des probabilités de transition de la marche aléatoire simple radiale. Ces formules mettent ensuite en évidence la convergence du générateur de la F_0-marche renormalisée vers celui du MB intrinsèque. Ceci implique alors le théorème 1.0.1, grâce à un critère de Ethier et Kurtz [E–K] (cf chapitre 5 pour plus de détails). Néanmoins lorsque les marches partent de 0, pour pouvoir appliquer ce critère, il faut pouvoir contrôler ce qui se passe en temps petit. C'est exactement le même principe que pour les processus de HO. Pour ces derniers, c'est l'estimation de F_0 du théorème 1.2.3 qui permettait de s'en sortir. Alors que pour les marches simples sur les immeubles, ce sont les estimations du noyau de transition du théorème 1.2.7 que l'on utilise.

Première partie

La théorie de Heckman et Opdam

Chapitre 2

Estimation des fonctions hypergéométriques, espace de Schwartz, noyau de la chaleur

Ce chapitre reprend pour l'essentiel l'article [Sch1] soumis pour publication.

Résumé : *Sous l'hypothèse d'une multiplicité positive, nous obtenons les estimations de base des fonctions hypergéométriques* F_λ *et* G_λ *de Heckman et Opdam, et des estimations optimales des fonctions particulières* F_0 *et* G_0*. Ensuite nous prouvons le théorème de Paley-Wiener pour l'espace de Schwartz, résolvons l'équation de la chaleur, et donnons des estimations du noyau de la chaleur.*

Abstract : *Under the assumption of positive multiplicity, we obtain basic estimates of the hypergeometric functions* F_λ *and* G_λ *of Heckman and Opdam, and sharp estimates of the particular functions* F_0 *and* G_0*. Next we prove the Paley-Wiener theorem for the Schwartz class, solve the heat equation and estimate the heat kernel.*

2.1 Introduction

Classical harmonic analysis on $\mathbb{R}^n$ has now been extended to other spaces. For instance Harish-Chandra considered the case of semi-simple Lie groups. Then he was followed by Helgason, who studied Riemannian symmetric spaces of the noncompact type, which are Riemannian spaces of negative curvature. In particular, Harish-Chandra introduced and studied the spherical functions, which play the role of the exponentials in these spaces. A more general setting, in the flat case, appeared two or three decades ago, with the theory of Dunkl operators. It gives a vast generalization of the exponential functions, and of the Fourier transform on $\mathbb{R}^n$. But it gives also a generalization of the harmonic analysis on tangent spaces of symmetric spaces. The natural counterpart of the Dunkl theory in the negatively curved setting is the theory of Heckman and Opdam. This theory has undergone a profound evolution with the discovery of the Cherednik operators [C1], the analogues of the Dunkl operators in the flat case.

Heckman and Opdam [H–O], [H–S], [O1] have developed their theory in the last two decades. They have first introduced a new family of functions F_λ on $\mathbb{R}^n$, which as in the Dunkl theory are associated to root systems and a parameter, the multiplicity function. They can be defined essentially as eigenfunctions of certain differential operators. When the multiplicity function takes particular values, then these operators coincide with the radial part of the G-invariant differential operators on the symmetric spaces of noncompact type G/K. Thus the restrictions to a Cartan subspace $\mathfrak{a}$ of the spherical functions are particular functions F_λ. In this way the theory of Heckman and Opdam is also a generalization of harmonic analysis on the symmetric spaces G/K. However, some of the techniques used by Harish-Chandra cannot always be transposed (at least not trivially) in this new theory, because there are no longer underlying Lie groups. The main tools used in harmonic analysis on the symmetric spaces are in the one part an integral formula of the spherical functions, and in another part a development in series of these spherical functions. Heckman and Opdam have shown that their functions F_λ have a development in series of Harish-Chandra type, but there is not (at least not yet) an integral formula, for general root systems. However this gap has been compensated by two main discoveries. First the discovery of the differential-difference operators by Cherednik [C1], and then the discovery by Opdam of a new type of functions, the functions G_λ [O1], for which the calculus and estimates can be more easily performed. These functions are eigenfunctions of the Cherednik operators. However until recently the only asymptotic result was essentially the fact that the functions F_λ and G_λ were bounded [O1]. Delorme has obtained a much better estimate, even in the more complicated case of a negative multiplicity [D], but it requires involved materials and techniques.

In this paper we give sharp estimates of the functions F_λ, G_λ and their derivatives, in an elementary way. Our method is only based on the study of the system of differential and difference equations satisfied by the functions G_λ, improving on the way what had been already done by De Jeu [Je1] and Opdam [O1] for bounding their functions. We also give a global estimate of the particular functions F_0 and G_0. It generalizes some results in the noncompact symmetric spaces [A1], [A–B–J]. Then we deduce from these estimates and from a general method of Anker [A2] the inversion formula on the Schwartz space. Finally we solve the heat equation and we give some estimates of the heat kernel.

2.2 Preliminaries

Let $\mathfrak{a}$ be a Euclidean vector space of dimension n, equipped with an inner product $(\cdot,\cdot)$. Let $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ be the complexification of $\mathfrak{a}$. The notation $\Re$ and $\Im$ denote the real and imaginary part respectively, of an element in $\mathfrak{h}$ or possibly in $\mathbb{C}$. Let $\mathcal{R} \subset \mathfrak{a}$ be an integral root system. We choose a subset of positive roots $\mathcal{R}^+$. We denote by $\mathcal{R}_0^+$ the set of positive indivisible roots, by Π the set of simple roots, and by Q^+ the positive lattice generated by $\mathcal{R}^+$. Let $\alpha^\vee = \frac{2}{|\alpha|^2}\alpha$ be the coroot associated to a root α and let

$$r_\alpha(x) = x - (\alpha^\vee, x)\alpha,$$

be the corresponding orthogonal reflection. We denote by W the Weyl group associated to $\mathcal{R}$, i.e. the group generated by the r_α's. If C is a subset of $\mathfrak{a}$, we call *conjugate* of C any image of C under the action of W. Let $k\ :\ \mathcal{R} \to [0,+\infty)$ be a multiplicity function, which by definition is W-invariant. In the sequel we may actually forget about the roots α with $k_\alpha = 0$ and restrict ourself to the root subsystem where k is strictly positive.
Let

$$\mathfrak{a}_+ = \{x \mid \forall \alpha \in \mathcal{R}^+,\ (\alpha, x) > 0\},$$

be the positive Weyl chamber. We denote by $\overline{\mathfrak{a}_+}$ its closure, and by $\partial\mathfrak{a}_+$ its boundary. Let also $\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}}$ be the subset of regular elements in $\mathfrak{a}$, i.e. those elements which belong to no hyperplane $\{\alpha = 0\}$. For I a subset of $\mathcal{R}^+$, let

$$\mathfrak{a}^I := \{x \in \mathfrak{a} \mid \forall \alpha \in I,\ (\alpha, x) = 0\}$$

be the face associated to I. Let $\mathcal{R}_I$ be the set of positive roots which are orthogonal to $\mathfrak{a}^I$, and let W_I be the subgroup of W generated by the r_α with $\alpha \in \mathcal{R}_I$.

For $\xi \in \mathfrak{a}$, let T_ξ be the Dunkl-Cherednik operator. It is defined, for $f \in C^1(\mathfrak{a})$, and $x \in \mathfrak{a}_{\mathrm{reg}}$, by

$$T_\xi f(x) = \partial_\xi f(x) + \sum_{\alpha\in\mathcal{R}^+} k_\alpha \frac{(\alpha,\xi)}{1 - e^{-(\alpha,x)}}\{f(x) - f(r_\alpha x)\} - (\rho,\xi) f(x),$$

where

$$\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\mathcal{R}^+} k_\alpha \alpha.$$

The Dunkl-Cherednik operators form a commutative family of differential-difference operators (see [C1] or [O1]). The Heckman–Opdam Laplacian $\mathcal{L}$ is defined by

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n} T_{\xi_i}^2,$$

where $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ is any orthonormal basis of $\mathfrak{a}$ ($\mathcal{L}$ is independent of the chosen basis). Here is an explicit expression (see the appendix), which holds for $f \in C^2(\mathfrak{a})$ and $x \in \mathfrak{a}_{\text{reg}}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f(x) &= \Delta f(x) + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} k_\alpha \coth \frac{(\alpha, x)}{2} \partial_\alpha f(x) + |\rho|^2 f(x) \\ &\quad - \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} k_\alpha \frac{|\alpha|^2}{4 \sinh^2 \frac{(\alpha,x)}{2}} \{f(x) - f(r_\alpha x)\} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Let $\lambda \in \mathfrak{h}$. We denote by F_λ the unique analytic W-invariant function on $\mathfrak{a}$, which satisfies the differential equations

$$p(T_\xi) F_\lambda = p(\lambda) F_\lambda \text{ for all W-invariant polynomials } p$$

and which is normalized by $F_\lambda(0) = 1$ (in particular $\mathcal{L}F_\lambda = (\lambda, \lambda) F_\lambda$). We denote by G_λ the unique analytic function on $\mathfrak{a}$, which satisfies the differential-difference equations

$$T_\xi G_\lambda = (\lambda, \xi) G_\lambda \text{ for all } \xi \in \mathfrak{a}, \tag{2.2}$$

and which is normalized by $G_\lambda(0) = 1$.

The $\mathbf{c}$*-function.*
We define the function $\mathbf{c}$ as follows (see [Hel] or [H–O]) :

$$\mathbf{c}(\lambda) = c_0 \prod_{\alpha \in \mathcal{R}^+} \frac{\Gamma(-(\lambda, \alpha^\vee) + \frac{1}{2} k_{\alpha/2})}{\Gamma(-(\lambda, \alpha^\vee) + k_\alpha + \frac{1}{2} k_{\alpha/2})},$$

where c_0 is a positive constant chosen in such a way that $\mathbf{c}(-\rho) = 1$, and $k_{\alpha/2} = 0$ if $\frac{\alpha}{2} \notin \mathcal{R}$. Observe that if

$$\pi(\lambda) := \prod_{\alpha \in \mathcal{R}_0^+} (\lambda, \alpha^\vee),$$

then the function

$$\mathbf{b}(\lambda) := \pi(\lambda) \mathbf{c}(\lambda),$$

is analytic in a neighborhood of 0.

Remark 2.2.1 For the reader's convenience, let us point out a notational difference between our setting and symmetric spaces. There Σ denotes the root system and $m : \Sigma \to \mathbb{N}^*$ the multiplicity function. Everything fits together if we set $\mathcal{R} = 2\Sigma$ and $k_{2\alpha} = \frac{1}{2} m_\alpha$. Notice in particular that ρ is defined in the same way in both settings :

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma^+} m_\alpha \alpha = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} k_\alpha \alpha.$$

2.3 Estimates

2.3.1 Positivity and first estimates

Let us begin with the following positivity result.

Lemma 2.3.1 *Assume that $\lambda \in \mathfrak{a}$. Then the functions F_λ and G_λ are real and strictly positive.*

Proof of lemma : Since

$$F_\lambda(x) = \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} G_\lambda(w \cdot x), \;\; x \in \mathfrak{a}, \tag{2.3}$$

it is enough to prove the lemma for G_λ. First of all, the function G_λ is real valued, since G_λ and $\overline{G_\lambda}$ satisfy the same equations (2.2), and hence are equal. Assume next that G_λ vanishes. Let x be a zero of G_λ of minimal norm $r = |x|$. Consider first the case where x is a regular point, and take a vector ξ in the same chamber as x. As G_λ is positive for $|x| < r$, we have

$$\partial_\xi G_\lambda(x) \leq 0.$$

Writing down (2.2), we get

$$\partial_\xi G_\lambda(x) \;\; = \;\; \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} k_\alpha \frac{(\alpha,\xi)}{1 - e^{-(\alpha,x)}} (G_\lambda(r_\alpha x) - G_\lambda(x)) + (\rho + \lambda, \xi) G_\lambda(x). \tag{2.4}$$

Since for all roots α,

$$\frac{(\alpha,\xi)}{1 - e^{-(\alpha,x)}} \geq 0,$$

we deduce that $\partial_\xi G_\lambda(x) = 0$, and that $G_\lambda(r_\alpha x) = 0$ for every $\alpha \in \mathcal{R}$. Hence G_λ and ∇G_λ vanish at the point x and furthermore at each conjugate of x under W. Differentiating (2.4), we see that every second order partial derivative of G_λ vanishes on the W-orbit of x. And similarly for all higher order derivatives. Since G_λ is analytic, we deduce that $G_\lambda \equiv 0$. This contradicts the fact that $G_\lambda(0) = 1$.
Consider next the case where x is singular and let $I = \{\alpha \in \mathcal{R}^+ \mid (\alpha, x) = 0\}$. The equations (2.2) become now

$$\begin{aligned} \partial_\xi G_\lambda(x) \;\; &= \;\; -\sum_{\alpha \in I} 2k_\alpha \frac{(\alpha,\xi)}{|\alpha|^2} \partial_\alpha G_\lambda(x) \\ &+ \;\; \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+ \smallsetminus I} k_\alpha \frac{(\alpha,\xi)}{1 - e^{-(\alpha,x)}} (G_\lambda(r_\alpha x) - G_\lambda(x)) + (\rho + \lambda, \xi) G_\lambda(x). \end{aligned} \tag{2.5}$$

We may argue as before, taking $\xi \in \mathfrak{a}^I$ in the same face as x. Notice that the first sum vanishes in the right hand side of (2.5), and that

$$\partial_\xi (r_\alpha G_\lambda)(x) = \partial_{r_\alpha \xi} G_\lambda(r_\alpha x).$$

with $r_\alpha \xi$ in the same face as $r_\alpha x$. Eventually we obtain that all partial derivatives of G_λ along directions belonging to $\mathfrak{a}^I$ vanish at x. Again since G_λ is analytic, it must vanish on $\mathfrak{a}^I$, which contradicts $G_\lambda(0) = 1$. This concludes the proof of the lemma. ■

The next proposition is fundamental in order to have uniform estimates in the parameter $\lambda \in \mathfrak{h}$.

Proposition 2.3.1 *(a) For all $\lambda \in \mathfrak{h}$,*

$$|G_\lambda| \leq G_{\Re(\lambda)}.$$

(b) For all $\lambda \in \mathfrak{a}$ and for all $x \in \mathfrak{a}$

$$G_\lambda(x) \leq G_0(x) e^{\max_w (w\lambda, x)}.$$

Proof of the proposition : For the first inequality, we study the behavior of the ratio $Q_\lambda = \frac{G_\lambda}{G_{\Re(\lambda)}}$. We must show that $|Q_\lambda|^2 \leq 1$. We will in fact prove that for all $\xi \in \mathfrak{a}_{\mathrm{reg}}$,

$$M(\xi, r) := \max_{w \in W} |Q_\lambda(rw\xi)|^2$$

is a decreasing function of $r \geq 0$. Since $M(\xi, 0) = 1$ for all ξ, the result will follow. First of all observe that the function M is continuous and right differentiable in the second variable r. Then, using (2.2), we get

$$\partial_\xi |Q_\lambda|^2(x) = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} \frac{2k_\alpha (\alpha, \xi)}{1 - e^{-(\alpha, x)}} (\Re\{Q_\lambda(x)\overline{Q_\lambda}(r_\alpha x)\} - |Q_\lambda(x)|^2) \frac{G_{\Re(\lambda)}(r_\alpha x)}{G_{\Re(\lambda)}(x)},$$

for all ξ and all x regular. Hence if x is a regular element such that

$$|Q_\lambda(x)|^2 = \max_w |Q_\lambda(wx)|^2,$$

and if ξ is a positive multiple of x, we have

$$\partial_\xi |Q_\lambda|^2(x) \leq 0.$$

This means that

$$\frac{\partial M}{\partial r}(\xi, |x|) \leq 0,$$

where we consider right derivatives. So for every ξ regular, and every $r \geq 0$,

$$\frac{\partial M}{\partial r}(\xi, r) \leq 0.$$

In order to conclude, we need the following elementary lemma, whose proof is left to the reader.

Lemma 2.3.2 *Let $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ be a continuous and right differentiable function. We denote by f'_d the right derivative of f. If for all $x \in \mathbb{R}^+$, $f'_d(x) \leq 0$, then f is decreasing.*

According to this lemma, we have $M(\xi, r) \leq M(\xi, 0) = 1$, for all $\xi \in \mathfrak{a}_{\mathrm{reg}}$ and all $r \geq 0$. By continuity, this inequality remains true if ξ is singular. This concludes the proof of the first inequality.
The second one is proved similarly, using the ratio

$$R_\lambda(x) := \frac{G_\lambda(x) e^{-\max_w (w\lambda, x)}}{G_0(x)}.$$

Specifically, if x is regular and $\xi \in \mathfrak{a}$, then

$$\begin{aligned} \partial_\xi R_\lambda(x) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} \frac{k_\alpha (\alpha, \xi)}{1 - e^{-(\alpha, x)}} (R_\lambda(r_\alpha x) - R_\lambda(x)) \frac{G_0(r_\alpha x)}{G_0(x)} \\ &+ ((\lambda, \xi) - \max_w (w\lambda, \xi)) R_\lambda(x), \end{aligned}$$

where we consider again right derivatives. So if x is such that

$$R_\lambda(x) = \max_w R_\lambda(wx)$$

and ξ is a positive multiple of x, then

$$\partial_\xi R_\lambda(x) \leq 0.$$

Therefore

$$N(\xi, r) := \max_{w \in W} R_\lambda(rw \cdot \xi)$$

is a decreasing function in $r \geq 0$, for all $\xi \in \mathfrak{a}_{\mathrm{reg}}$. We conclude as for the first inequality. ■

By averaging over the Weyl group, we deduce the following inequalities from Proposition 2.3.1.

Corollary 2.3.1 *1. For all $\lambda \in \mathfrak{h}$,*

$$|F_\lambda| \leq F_{\Re(\lambda)}.$$

2. For all $\lambda \in \mathfrak{a}$ and for all $x \in \mathfrak{a}$

$$F_\lambda(x) \leq F_0(x) e^{\max_{w \in W} (w\lambda, x)}.$$

2.3.2 Local Harnack principles and sharp global estimates

In this subsection we first establish two Harnack principles for G_λ and F_λ when $\lambda \in \mathfrak{a}$, and next deduce sharp global estimates of these functions F_λ and of the function G_0. Before stating the results we introduce some new notation. Let I be a subset of $\mathcal{R}^+$, and let $d \leq d'$ be two strictly positive constants. We denote by $V^I(d,d')$ the following subset of $\mathfrak{a}$:

$$V^I(d,d') := \{x \in \mathfrak{a} \mid \forall \alpha \in \mathcal{R}_I,\ |(\alpha,x)| \leq d \text{ and } \forall \alpha \notin \mathcal{R}_I,\ |(\alpha,x)| > d'\}.$$

Let $x \in V^I(d,d')$, with I non empty. Let $p^I(x)$ denote its orthogonal projection on $\mathfrak{a}^I$. Let $u \in \mathfrak{a}^I$ be such that for every $\alpha \notin \mathcal{R}_I$, $(\alpha,u)\mathrm{sgn}((\alpha,x)) \geq |\alpha|$. Define now the vectors $\xi_1(x)$, and $\eta_1(x)$ as follows :

$$\xi_1(x) = \frac{p^I(x)-x}{|p^I(x)-x|} + u, \text{ and } \eta_1(x) = \frac{p^I(x)-x}{|p^I(x)-x|} - u.$$

We will sometime just write them ξ_1 and η_1 to simplify the notation. Notice that everything was done in order that

$$\forall \alpha \notin \mathcal{R}_I,\ (\alpha,\xi_1(x))(\alpha,x) \geq 0 \text{ and } (\alpha,\eta_1(x))(\alpha,x) \leq 0. \tag{2.6}$$

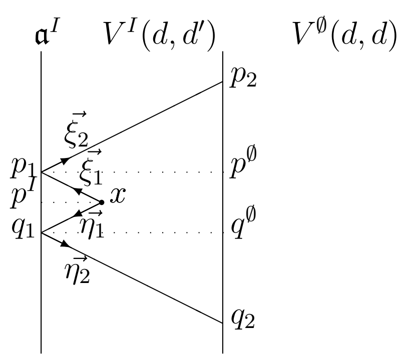
Naturally we have also

$$\forall \alpha \in \mathcal{R}_I,\ (\alpha,\xi_1(x))(\alpha,x) = (\alpha,\eta_1(x))(\alpha,x) \leq 0. \tag{2.7}$$

We denote by p_1 and q_1 the projections of x on $\mathfrak{a}^I$ along the directions ξ_1 and η_1 respectively (we suppose that d' is sufficiently large in order that these projections still lie in the same chamber than x). Then we denote by $p^\emptyset$ and $q^\emptyset$ the orthogonal projections of p_1 and q_1 respectively on $V^\emptyset(d,d)$. We define also the vectors ξ_2 and η_2 (like before we forget the dependence in x in the notation) by

$$\xi_2 = \frac{p^\emptyset - p_1}{|p^\emptyset - p_1|} + u, \text{ and } \eta_2 = \frac{q^\emptyset - q_1}{|q^\emptyset - q_1|} - u.$$

Finally let p_2 and q_2 be the projections on $V^\emptyset(d,d)$ of p_1 and q_1 respectively along the directions ξ_2 and η_2 (here again we suppose that d' is sufficiently large in order that these projections lie in the same chamber than x). We summarize these definitions in the following figure



We can now state the lemma

Lemma 2.3.3 (Local Harnack principle 1) *Let $\lambda \in \mathfrak{a}$, and let d and d' be chosen as above. There exist two constants $C > 0$ and $c > 0$ such that for all $x \in V^I(d, d')$,*

$$\max_{w \in W_I} G_\lambda(wx) \leq C \min_{w \in W_I} G_\lambda(wp_2(x)),$$

and

$$\min_{w \in W_I} G_\lambda(wx) \geq c \max_{w \in W_I} G_\lambda(wq_2(x)).$$

Proof of the lemma : We begin by the first inequality. Let $x \in V^I$. First remark that $|x - p_1(x)|$ and $|x - q_1(x)|$ are bounded by a constant, say h, which depends only on d. We introduce the function M_λ defined on $\mathfrak{a}$ by :

$$M_\lambda(x) = \max_{w \in W_I} G_\lambda(wx).$$

Let y be such that $G_\lambda(y) = M_\lambda(y)$. We have

$$\begin{aligned} \partial_{\xi_1} G_\lambda(y) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_I} k_\alpha \frac{(\alpha, \xi_1)}{1 - e^{-(\alpha, y)}} (G_\lambda(r_\alpha y) - G_\lambda(y)) \\ &+ \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+ \smallsetminus \mathcal{R}_I} k_\alpha \frac{(\alpha, \xi_1)}{1 - e^{-(\alpha, y)}} (G_\lambda(r_\alpha y) - G_\lambda(y)) \\ &+ (\rho + \lambda, \xi_1) G_\lambda(y) \\ &\geq - \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+ \smallsetminus \mathcal{R}_I} k_\alpha \frac{(\alpha, \xi_1)}{1 - e^{-(\alpha, y)}} G_\lambda(y) + (\rho + \lambda, \xi_1) G_\lambda(y). \end{aligned}$$

The lower bound is deduced from our choice of y and from the properties of ξ_1 (2.6) and (2.7). Now when $\alpha \in \mathcal{R}^+ \smallsetminus \mathcal{R}_I$, the ratio $\frac{(\alpha, \xi_1)}{1 - e^{-(\alpha, y)}}$ is bounded by a constant which depends only on d'. Thus we can find a constant K, which depends only on d' and λ such that for all $y \in V^I(d, d')$,

$$\partial_{\xi_1} M_\lambda(y) \geq -K M_\lambda(y).$$

Here like in the proof of Proposition 2.3.1, we consider the right derivatives. Again by Lemma 2.3.2, we get

$$M_\lambda(x) \leq e^{Kh} M_\lambda(p_1(x)). \tag{2.8}$$

Now we introduce the function N_λ defined on $\mathfrak{a}$ by

$$N_\lambda(x) = \min_{w \in W_I} G_\lambda(wx).$$

Observe already that N_λ and M_λ are equal on $\mathfrak{a}^I$, and in particular in $p_1(x)$. Moreover, by the same technique as above, we can find a strictly positive constant K' such that

$$N_\lambda(p_1(x)) \leq e^{K'h} N_\lambda(p_2(x)).$$

Together with (2.8) this proves the first inequality of the lemma. The second one can be proved exactly in the same way, by using this time the intermediate point $q_1(x)$. ■

We could deduce from this lemma a local Harnack principle for F_λ too. We will instead give a simple expression of the gradient of F_λ, which implies such a principle. Moreover this expression will be needed in the proof of Theorem 2.3.3.

Lemma 2.3.4 (Local Harnack principle 2) *For all $x \in \overline{\mathfrak{a}_+}$ and for all $\lambda \in \mathfrak{a}$,*

$$\nabla F_\lambda(x) = -\frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} w^{-1}(\rho - \lambda)\ G_\lambda(wx). \tag{2.9}$$

In particular,

$$|\nabla F_\lambda(x)| \leq (|\rho| + |\lambda|) F_\lambda(x).$$

Proof of the lemma : By differentiating (2.3) we get as above

$$\partial_\xi F_\lambda(x) = \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} \partial_{w\xi} G_\lambda(wx),$$

for all $\xi \in \mathfrak{a}$. Now we use the equations (2.2), which gives

$$\begin{aligned}
\partial_\xi F_\lambda(x) &= \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} k_\alpha \frac{(\alpha, w\xi)}{1 - e^{-(\alpha, wx)}} \{G_\lambda(r_\alpha wx) - G_\lambda(wx)\} \\
&+ \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} (\rho + \lambda, w\xi) G_\lambda(wx) \\
&= -\frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} k_\alpha (\alpha, w\xi) \{\underbrace{\frac{1}{1 - e^{-(\alpha, w\xi)}} + \frac{1}{1 - e^{(\alpha, w\xi)}}}_{=1}\} G_\lambda(wx) \\
&+ \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} (\rho + \lambda, w\xi) G_\lambda(wx) \\
&= \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} (\lambda - \rho, w\xi) G_\lambda(wx).
\end{aligned}$$

This proves the first claim of the lemma. The second one is an easy consequence, using again (2.3) and the positivity of G_λ. ■

We can now deduce a sharp global estimate of F_0 which extends the result of Anker [A1] to any multiplicities $k > 0$. Recently Sawyer [Saw] has obtained the same result for root systems of type A, using explicit formulas.

Theorem 2.3.1 *In $\overline{\mathfrak{a}_+}$,*

$$F_0(x) \asymp e^{-(\rho, x)} \prod_{\alpha \in \mathcal{R}_0^+} (1 + (\alpha, x)).$$

Proof of the theorem : We resume the proof in [A1], that we sketch. The local Harnack principle for F_0 (which was deduced in [A1] from Harish-Chandra's integral formula) allows us to move the estimate away from the walls in $\mathfrak{a}_+$. There we expand F_0, using the Harish-Chandra series

$$F_\lambda(x) = \sum_{w\in W}\sum_{q\in Q^+} \mathbf{c}(w\lambda)\Gamma_q(w\lambda)e^{(w\lambda-\rho-q,x)}$$

that we multiply by $\pi(\lambda)$ in order to remove the singularity of the $\mathbf{c}$-function at the origin. Then we differentiate with respect to $\pi(\frac{\partial}{\partial\lambda})|_{\lambda=0}$, in order to recover F_0, up to a positive constant. As a result we obtain a converging series

$$F_0(x) = \sum_{q\in Q^+} F_q(x)e^{-(\rho+q,x)},$$

with polynomial coefficients F_q and leading term

$$F_0 e^{-(\rho,x)} \sim \text{const.}\pi(x)e^{-(\rho,x)}.$$

$\blacksquare$

Remark 2.3.1 We may estimate in a similar way the function F_λ when λ is real. The result reads as follows : for any $\lambda \in \overline{\mathfrak{a}_+}$,

$$F_\lambda(x) \asymp \prod_{\alpha\in\mathcal{R}_0^+|(\alpha,\lambda)=0} (1+(\alpha,x))e^{(\lambda-\rho,x)}$$

on $\overline{\mathfrak{a}_+}$.

Let us turn to the function G_0. For $x\in\mathfrak{a}$, we denote by x^+ its unique conjugate in $\overline{\mathfrak{a}_+}$.

Theorem 2.3.2 *In $\mathfrak{a}$,*

$$G_0(x) \asymp \prod_{\alpha\in\mathcal{R}_0^+|(\alpha,x)\geq 0} (1+(\alpha,x))e^{(-\rho,x^+)}. \tag{2.10}$$

Proof of the theorem : Let us first show that G_λ has a series expansion in each chamber, as was done by Opdam in the negative chamber $\mathfrak{a}_-$ [O1]. We summarize his proof. He first obtained that there exists a polynomial p such that for all $x\in\mathfrak{a}_{\text{reg}}$,

$$(\prod_{\alpha\in\mathcal{R}_0^+}(\lambda,\alpha^\vee)-k_\alpha-2k_{2\alpha})G_\lambda(x) = p(\lambda,T_\xi)F_\lambda(x).$$

By expanding F_λ and $T=T_\xi$ in each chamber, we find developments of the function G_λ :

$$G_\lambda(x) = \sum_{w'\in W}\mathbf{c}(w^{-1}w'\lambda)\sum_{q\in wQ^+} G_{\lambda,q}^{w,w'}e^{(w'\lambda-w\rho-q,x)}$$

for all $x \in w\mathfrak{a}_+$. Moreover Opdam has proved that $G^{w_0,w'}_{\lambda,0}$ is equal to $|W|\delta_{1,w'}\pi(\lambda)$, where w_0 denotes the longest element in W. Now we apply the same technique as in Theorem 2.3.1. First we multiply these developments by $\pi(\lambda)$, and then we differentiate with respect to $\pi(\frac{\partial}{\partial\lambda})|_{\lambda=0}$. We get developments of the function G_0 in each chamber :

$$G_0(x) = \sum_{q\in wQ^+} G^w_q(x) e^{-(w\rho+q,x)} \tag{2.11}$$

for all $x \in w\mathfrak{a}_+$, where the G^w_q are real polynomials. Moreover according to the above mentioned result of Opdam, we see that $G^{w_0}_0$ is a strictly positive constant. Recall some basic notation. The length $l(w)$ of an element of W is defined by

$$l(w) = |\mathcal{R}^+_0 \cap w\mathcal{R}^-_0|.$$

Recall that Π denotes the set of simple roots in $\mathcal{R}^+$. Each $q \in Q^+$ writes $q = \sum_{\alpha\in\Pi} n_\alpha \alpha$, with $n_\alpha \in \mathbb{N}$. We denote by $|q| := \sum_{\alpha\in\Pi} n_\alpha$ the length of q. For $q' \in Q^+$, we write $q' \leq q$, if $q - q' \in Q^+$. Naturally we have similar definitions on wQ^+, where we denote by $|q|_w$ the length of any $q \in wQ^+$ and we write $q' \leq_w q$, if $q' \in wQ^+$ and $q - q' \in wQ^+$. Consider the polynomials

$$\pi_w(x) = \prod_{\alpha\in\mathcal{R}^+_0\cap w\mathcal{R}^+_0} (\alpha^\vee, x) \quad \text{and} \quad \tilde{\pi}_w(x) = \prod_{\alpha\in\mathcal{R}^+_0\cap w\mathcal{R}^+_0} \Big(1 + (\alpha^\vee, x)\Big).$$

We need the following lemma, which will be used throughout the proof of Theorem 2.3.2.

Lemma 2.3.5 *Let $w \in W$.*

1. *If $\alpha \in \Pi \cap w\mathcal{R}^+$, then $\pi_{r_\alpha w}(r_\alpha x) = \frac{\pi_w(x)}{(\alpha^\vee,x)}$, for all $x \in \mathfrak{a}_{reg}$.*
2. *If $\alpha \in \mathcal{R}^+_0 \cap w\mathcal{R}^+_0$, then $\tilde{\pi}_{r_\alpha w}(r_\alpha x) \leq \frac{\tilde{\pi}_w(x)}{1+(\alpha^\vee,x)}$, for all $x \in w\mathfrak{a}_+$.*
3. *If $\alpha \in \mathcal{R}^-_0 \cap w\mathcal{R}^+_0$, then there exists a constant $C > 0$, such that $\tilde{\pi}_{r_\alpha w}(r_\alpha x) \leq C\tilde{\pi}_w(x)(1 + (\alpha^\vee, x))^{|\mathcal{R}^+|}$, for all $x \in w\mathfrak{a}_+$.*

Proof of the lemma : Let us prove the first claim. Since $\alpha \in \Pi$, r_α maps $\mathcal{R}^+_0 \smallsetminus \{\alpha\}$ onto itself, hence $\mathcal{R}^+_0 \cap r_\alpha w\mathcal{R}^+_0$ onto $(\mathcal{R}^+_0 \cap w\mathcal{R}^+_0) \smallsetminus \{\alpha\}$. The first claim follows.
Let us prove the second claim. We define therefore an injective map i from $\mathcal{R}^+_0 \cap r_\alpha w\mathcal{R}^+_0$ into $(\mathcal{R}^+_0 \cap w\mathcal{R}^+_0) \smallsetminus \{\alpha\}$, such that $r_\alpha\beta \leq_w i(\beta)$ for all β. The second claim will follow. Let $\beta \in \mathcal{R}^+_0 \cap r_\alpha w\mathcal{R}^+_0$. If $r_\alpha\beta \in \mathcal{R}^+_0$, then we set $i(\beta) = r_\alpha\beta$. Otherwise, we have $(\alpha, \beta) \geq 0$. Hence $r_\alpha\beta \leq_w \beta$. But $r_\alpha\beta \in w\mathcal{R}^+_0$, and therefore $r_\alpha\beta \geq_w 0$. Thus $\beta \in \mathcal{R}^+_0 \cap w\mathcal{R}^+_0$ and we set $i(\beta) = \beta$. The map i defined this way has all required properties.
Let us prove the third claim. We define this time an injective map i from $I \subset \mathcal{R}^+_0 \cap r_\alpha w\mathcal{R}^+_0$ into $\mathcal{R}^+_0 \cap w\mathcal{R}^+_0$ such that, if $\beta \in I$, then $r_\alpha\beta \leq_w i(\beta) + |(\alpha^\vee, \beta)|\alpha$, and otherwise $r_\alpha\beta \leq_w |(\alpha^\vee, \beta)|\alpha$. The third claim will follow. Assume that $\beta \in \mathcal{R}^+_0 \cap r_\alpha w\mathcal{R}^+_0$. If $r_\alpha\beta \in \mathcal{R}^+_0$, then we set $i(\beta) = r_\alpha\beta$. Otherwise $(\alpha, \beta) \leq 0$. Next, either $\beta \in w\mathcal{R}^+_0$, in which case $r_\alpha\beta \leq_w \beta + |(\alpha^\vee, \beta)|\alpha$, and we set $i(\beta) = \beta$. Or $\beta \in w\mathcal{R}^-_0$ in which case $r_\alpha\beta \leq_w |(\alpha^\vee, \beta)|\alpha$. The map i defined this way has all required properties. ■

By expanding G_0 in (2.4) according to (2.11) we get

$$\begin{aligned}\nabla G_q^w(x) &= G_q^w(x)q + \sum_{\alpha\in\mathcal{R}^+\cap w\mathcal{R}^+} k_\alpha G_{r_\alpha q}^{r_\alpha w}(r_\alpha x)\alpha \\ &+ \sum_{\alpha\in w\mathcal{R}^+} k_\alpha \sum_{j\in\mathbb{N}^*}\{G_{r_\alpha(q-j\alpha)}^{r_\alpha w}(r_\alpha x) - G_{(q-j\alpha)}^w(x)\}\alpha,\end{aligned} \tag{2.12}$$

for all $w\in W$, all $q\in wQ^+$, and all $x\in w\overline{\mathfrak{a}_+}$.

Step 1 *:* Let us first establish the estimate

$$|G_0^w(x)| \le C\tilde{\pi}_w(x) \quad \forall w\in W, \quad \forall x\in w\overline{\mathfrak{a}_+}.$$

It is obvious for $w=w_0$. Let us prove it by induction on $l(w_0)-l(w)$. For $q=0$, (2.12) amounts to

$$\partial_\xi G_0^w(x) = \sum_{\alpha\in\mathcal{R}^+\cap w\mathcal{R}^+} k_\alpha(\alpha,\xi)G_0^{r_\alpha w}(r_\alpha x).$$

Using the induction hypothesis and Lemma 2.3.5, we get

$$\begin{aligned}\partial_\xi G_0^w(x) &\le C\sum_{\alpha\in\mathcal{R}^+\cap w\mathcal{R}^+} k_\alpha(\alpha,\xi)\tilde{\pi}_{r_\alpha w}(r_\alpha x) \\ &\le C\sum_{\alpha\in\mathcal{R}^+\cap w\mathcal{R}^+} k_\alpha\frac{(\alpha,\xi)}{1+(\alpha^\vee,x)}\tilde{\pi}_w(x) \\ &= C\partial_\xi\tilde{\pi}_w(x)\end{aligned}$$

for all $x\in w\overline{\mathfrak{a}_+}$ and $\xi\in w\overline{\mathfrak{a}_+}$, in particular for $\xi\in\mathbb{R}^+x$. Since $G_0^w(0)\le C$ provided C is large enough, we obtain the upper estimate

$$G_0^w(x)\le C\tilde{\pi}_w(x) \quad \forall x\in w\overline{\mathfrak{a}_+}.$$

The same argument yields the lower estimate

$$G_0^w(x)\ge -C\tilde{\pi}_w(x) \quad \forall x\in w\overline{\mathfrak{a}_+}.$$

Step 2 *:* Let us next establish the following estimate : There exist a constant $C>0$ and $h\in\mathfrak{a}_+$, such that for every $w\in W$, $q\in wQ^+$ and $x\in C_h^w := wh + w\overline{\mathfrak{a}_+}$,

$$|G_q^w(x)| \le C^{|q|_w}\tilde{\pi}_w(x)(1+q(x))^{|\mathcal{R}^+|}. \tag{2.13}$$

The case $q=0$ was considered in step 1. Let $q\in Q^+\smallsetminus\{0\}$ and $w\in W$. Assume that (2.13) holds for all $(q',w')\in w'Q^+\times W$ such that $|q'|_w<|q|_w$ or such that $|q'|_w=|q|_w$ and $l(w')<l(w)$. Using (2.12), the induction hypothesis and Lemma 2.3.5, we get

$$\partial_\xi\Big[C^{|q|_w}\tilde{\pi}_w(1+q)^{|\mathcal{R}^+|} - G_q^w\Big](x) \ge (q,\xi)\Big[|\mathcal{R}^+|C^{|q|_w}\tilde{\pi}_w(1+q)^{|\mathcal{R}^+|-1} - G_q^w\Big](x), \tag{2.14}$$

for all $\xi \in w\mathfrak{a}_+$ and all $x \in wh + w\mathfrak{a}_+$, provided $C > 0$ is large enough. Using now (2.11) at the point wh we can also assume, by taking again larger C if necessary, that

$$G_q^w(wh) \leq C^{|q|_w},$$

for all $q \in wQ^+$. Let now $u \in wh + w\overline{\mathfrak{a}_+}$ be such that $(1 + (q, u)) = |\mathcal{R}^+|$. Equation (2.14) implies that

$$[C^{|q|_w} \tilde{\pi}_w (1+q)^{|\mathcal{R}^+|} - G_q^w](x) \geq 0, \tag{2.15}$$

for all x in the segment $[wh, u]$. For $x = wh + t(u - wh)$ with $t \geq 1$, we have

$$\partial_u \Big[C^{|q|_w} \tilde{\pi}_w (1+q)^{|\mathcal{R}^+} - G_q^w\Big](x) \geq (q, u)\frac{|\mathcal{R}^+|}{(1 + (q, x))}\Big[C^{|q|_w} \tilde{\pi}_w (1+q)^{|\mathcal{R}^+|} - G_q^w \vee 0\Big](x).$$

Thus (2.15) holds also for $x = wh + t(u - wh)$ with $t \geq 1$. This proves the upper estimate

$$G_q^w(x) \leq C^{|q|_w} \tilde{\pi}_w(x)(1 + q(x))^{|\mathcal{R}^+|},$$

in C_h^w. The same argument gives the lower estimate

$$G_q^w(x) \geq -C^{|q|_w} \tilde{\pi}_w(x)(1 + q(x))^{|\mathcal{R}^+|}.$$

Step 3 *:* Let us now find a lower bound for G_0^w. We prove by induction on $l(w_0) - l(w)$ that there exist a constant $c > 0$ and $h \in \mathfrak{a}_+$, such that

$$G_0^w(x) \geq c\pi_w(x)$$

for all $x \in C_h^w$. We suppose that it is true for w' such that $l(w') > l$ and we consider w of length l. By the induction hypothesis there exists some $h \in \mathfrak{a}_+$ and $c > 0$ such that, $G_0^{r_\alpha w}(r_\alpha x) \geq c\pi_{r_\alpha w}(r_\alpha x)$, for all $x \in C_h^w$ and all $\alpha \in \mathcal{R}^+ \cap w\mathcal{R}^+$. Let now $c' > 0$ be another constant. Assume that for some $x_0 \in C_h^w$,

$$[G_0^w - c'\pi_w](x_0) \leq [G_0^w - c'\pi_w](wh) - 1,$$

and suppose that x_0 is such element of minimal norm in C_h^w. Let $(\alpha^*)_{\alpha \in w\Pi}$ be the dual basis of $w\Pi$, i.e. for α and β in $w\Pi$, $(\alpha^*, \beta) = 0$ if $\alpha \neq \beta$ and $= 1$ otherwise. Let $\alpha_0 \in w\Pi$ be such that $(\alpha_0, x_0 - h) = \max_{\beta \in w\Pi}(\beta, x_0 - h)$. It implies that, for small $\epsilon > 0$ at least, $x_0 - \epsilon\alpha_0^* \in C_h^w$. Hence

$$\partial_{\alpha_0^*}[G_0^w - c'\pi_w](x_0) \leq 0.$$

On the other hand we know that for $x \in w\mathfrak{a}_+$,

$$\nabla[G_0^w - c'\pi_w](x) = \sum_{\beta \in \mathcal{R}^+ \cap w\mathcal{R}^+} \beta[k_\beta G_0^{r_\beta w}(r_\beta x) - \frac{2c'}{|\beta|^2}\frac{\pi_w(x)}{(\beta^\vee, x)}]. \tag{2.16}$$

Now we need the following elementary lemma.

Lemma 2.3.6 *Let $\alpha \in w\Pi$. Assume that there exists $\beta \in \mathcal{R}_0^+ \cap w\mathcal{R}^+$, such that $\alpha \leq_w \beta$. Then there exists $\gamma \in \Pi \cap w\mathcal{R}^+$, such that $\alpha \leq_w \gamma$.*

Proof of the lemma : Let $\beta = \sum_{\gamma \in \Pi} n_\gamma \gamma$ be the decomposition of β in Π. Since $\beta \in w\mathcal{R}_0^+$, there exists $\gamma \in \Pi \cap w\mathcal{R}_0^+$ such that $n_\gamma > 0$. We see moreover that $\tilde{\gamma} := \sum_{\gamma \in \Pi \cap w\mathcal{R}_0^+} n_\gamma \gamma \in w\mathcal{R}^+$, and that $\beta \leq_w \tilde{\gamma}$, which concludes the proof of the lemma. ■

Suppose now that there does not exist $\gamma \in \Pi \cap w\mathcal{R}^+$ such that $\alpha_0 \leq_w \gamma$. Then by Lemma 2.3.6, no other $\beta \in \mathcal{R}^+ \cap w\mathcal{R}^+$ satisfies $\alpha_0 \leq_w \beta$. Thus from equation (2.16) we get that for all y in the segment between $x_0 - \epsilon\alpha_0^*$ and x_0, $\partial_{\alpha_0^*}[G_0^w - c'\pi_w](y) = 0$, which contradicts the initial hypothesis on x_0. We conclude that there exists $\gamma \in \Pi \cap w\mathcal{R}^+$ such that $\alpha_0 \leq_w \gamma$. Again from (2.16) we get

$$\partial_{\alpha_0^*}[G_0^w - c'\pi_w](x_0) \geq c_1 c \pi_{r_\gamma w}(r_\gamma x_0) - c_2 c' \frac{\pi_w(x_0)}{(\alpha_0^\vee, x_0)},$$

where c_1 and c_2 are positive constants. But with the first part of Lemma 2.3.5 we have $\pi_{r_\gamma w}(r_\gamma x_0) = \frac{\pi_w(x_0)}{(\gamma^\vee, x_0)}$. Moreover by our choice of α_0, we have $(\gamma, x_0) \leq |\gamma|_w (\alpha_0, x_0)$. Thus if c' is sufficiently small we get

$$\partial_{\alpha_0^*}[G_0^w - c'\pi_w](x_0) > 0$$

and a contradiction. The induction hypothesis for w follows.

Putting now the third steps together, we get the desired estimate of G_0 away from the walls. With Lemma 2.3.3, this concludes the proof of the theorem. ■

The preceding theorem has for us a very important consequence. Let E be the Euler operator. It is defined for f regular, and $x \in \mathfrak{a}$, by $Ef(x) = (x, \nabla f(x))$. The following theorem generalizes the analogue result of [A–B–J] in the setting of symmetric spaces. Our proof is in a certain sense more elementary than in [A–B–J], because we do not make use of the descent technique of Harish-Chandra.
The first claim of the theorem will be needed in the estimate of the heat semigroup (Proposition 2.5.2). It will also be used in the study of the asymptotic convergence of the F_0-processes (see [A–B–J]). It will allow us in [Sch1] to generalize some results of Anker, Bougerol, and Jeulin [A–B–J] for all $k > 0$. The second claim is just a technical result needed in the proof of the estimate of the heat kernel (see Theorem 2.5.2).

Theorem 2.3.3 *1. There exists a constant $K > 0$ such that for any $x \in \overline{\mathfrak{a}_+}$,*

$$0 \leq E[\log(e^\rho F_0)](x) \leq K.$$

2. We have the two following estimates

$$E[\log(e^\rho F_0)](x) = |\mathcal{R}_0^+| + \mathcal{O}(\frac{1}{1 + \min_{\alpha \in \mathcal{R}^+}(\alpha, x)}),$$

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{R}_0^+} \frac{(\alpha, x)}{\sqrt{1 + (\alpha, x)^2}} \partial_\alpha(\log(e^\rho F_0))(x) \asymp \frac{1}{1 + \min_{\alpha \in \mathcal{R}^+}(\alpha, x)}.$$

Proof of the theorem : With the formula (2.3) and (2.9), we get for any $x \in \overline{\mathfrak{a}_+}$,

$$E[\log(e^\rho F_0)](x) = \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} [(\rho, x) - (\rho, wx)] \frac{G_0(wx)}{F_0(x)}. \tag{2.17}$$

1. Formula (2.17) proves already the first inequality. For the second inequality we show by induction on the length $l(w)$ of $w \in W$ that for all $x \in \overline{\mathfrak{a}_+}$,

   $$(\rho, x) - (\rho, wx) \leq K' l(w) \max_{\alpha \in \mathcal{R}_0^+ \cap w\mathcal{R}^-} |(\alpha, wx)|, \tag{2.18}$$

   where $K' = \max_{\alpha \in \mathcal{R}_0^+} (\rho, \alpha^\vee)$ is a constant. Suppose that the induction hypothesis is true for all w of length less or equal to l. Let $v \in W$ be of length $l+1$. Let $\alpha \in \Pi \cap v\mathcal{R}^-$, and let $w = r_\alpha v$. We have $l(w) = l$. Moreover since $\alpha \in \Pi$, r_α maps $\mathcal{R}_0^+ \cap w\mathcal{R}_0^-$ onto $(\mathcal{R}_0^+ \cap v\mathcal{R}_0^-) \setminus \{\alpha\}$. But for all $x \in \mathfrak{a}$,

   $$(\rho, x) - (\rho, vx) = (\rho, x) - (\rho, wx) - (\alpha, vx)(\rho, \alpha^\vee).$$

   Thus (2.18) follows for v by using the induction hypothesis. Now with Theorems 2.3.1 and 2.3.2, the first claim is proved.

2. These estimates result also from Formula (2.17) and the global estimates (Theorems 2.3.1 and 2.3.2) of G_0 and F_0. The fact that $|\mathcal{R}_0^+|$ is the limit of $E[\log(e^\rho F_0)](x)$ when $(\alpha, x) \to \infty$ for all α can be seen exactly like in [A–B–J] by expanding the functions F_λ in series. This finishes the proof of the theorem. ■

2.3.3 Estimates of the derivatives

In this subsection we estimate the derivatives of the hypergeometric function $G_\lambda(x)$, first in x alone and next jointly in (λ, x).

Proposition 2.3.2 *Let p be a polynomial of degree N. Then there exists a constant C such that, for any $\lambda \in \mathfrak{h}$ and for any $x \in \mathfrak{a}$,*

$$|p(\frac{\partial}{\partial x}) G_\lambda(x)| \leq C(1 + |\lambda|)^N F_0(x) e^{\max_w \Re(w\lambda, x)}.$$

Proof of the proposition : According to Proposition 2.3.1, we know that this estimate holds with no derivative.

Step 1 : Estimate away from walls

By induction, Formula (2.4) allows us to express on $\mathfrak{a}_{\text{reg}}$ derivatives of G_λ in terms of lower order derivatives and to estimate them away from walls. More precisely we obtain this way the desired estimate when x stays at distance $\geq \frac{\epsilon}{1+|\lambda|}$ from walls.

Step 2 : Estimate on faces

Assume that x lies in a face $\mathfrak{a}^I$ (of minimal dimension), then (2.4) becomes (2.5), which writes also

$$\begin{aligned} \partial_{A_{w,I}(\xi)} G_\lambda(x) &= \sum_{\alpha\in\mathcal{R}^+\smallsetminus\mathcal{R}_I} k_\alpha \frac{(\alpha,\xi)}{1-e^{-(\alpha,x)}}(G_\lambda(r_\alpha x)-G_\lambda(x)) \\ &+ (\rho+\lambda,\xi)G_\lambda(x), \end{aligned} \tag{2.19}$$

where

$$A_{w,I}(\xi) = \xi + 2\sum_{\alpha\in\mathcal{R}_I} \frac{k_\alpha}{|\alpha|^2}(\alpha,\xi)\alpha.$$

Notice that the linear map $A_{w,I}:\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}$ is one-to-one, since the expression

$$(A_{w,I}(\xi),\xi) = |\xi|^2 + 2\sum_{\alpha\in\mathcal{R}_I}\frac{k_\alpha}{|\alpha|^2}(\alpha,\xi)^2$$

is strictly positive for all nonzero ξ. By induction, (2.19) yields the following estimate : for every $\epsilon>0$, there exists a constant $C\geq 0$ such that, for all multi-indices κ, for all $\lambda\in\mathfrak{h}$ and for $x\in\mathfrak{a}^I$ such that $\min_{\alpha\in\mathcal{R}^+\smallsetminus\mathcal{R}_I}|(\alpha,x)|\geq\frac{\epsilon}{1+|\lambda|}$,

$$|(\frac{\partial}{\partial x})^\kappa G_\lambda(x)| \leq |\kappa|!C^{|\kappa|}(1+|\lambda|)^{|\kappa|}F_0(x)e^{\max_{w\in W}(w\Re\lambda,x)}. \tag{2.20}$$

Step 3 : Estimate near the faces
If x is near a face $\mathfrak{a}^I$, we use (2.20) and the Taylor development of G_λ in the orthogonal projection of x on $\mathfrak{a}^I$. More precisely let $\epsilon>0$ be such that $C\epsilon<1$, where C is the constant appearing in (2.20). Then there exists a constant $C'>0$ such that, for all multi-indices κ, for all $\lambda\in\mathfrak{h}$ and for $x\in\mathfrak{a}$ at distance $\leq\frac{\epsilon}{1+|\lambda|}$ from $\mathfrak{a}^I$, such that $\min_{\alpha\in\mathcal{R}^+\smallsetminus\mathcal{R}_I}|(\alpha,x)|\geq\frac{\epsilon}{1+|\lambda|}$,

$$|(\frac{\partial}{\partial x})^\kappa G_\lambda(x)| \leq C'(1+|\lambda|)^{|\kappa|}F_0(x)e^{\max_{w\in W}(w\Re\lambda,x)}. \tag{2.21}$$

Step 4 : Conclusion
Now we first use the step 3 near the origin. We get $\epsilon_0>0$ and $C_0>0$, such that (2.21) holds (with C_0 in place of C') for $x\in\mathfrak{a}$ at distance $\leq\frac{\epsilon_0}{1+|\lambda|}$ from the origin. Then we use the step 3 near the faces of dimension 1. We get ϵ_1 and C_1 such that (2.21) holds for $x\in\mathfrak{a}$ at distance $\leq\frac{\epsilon_1}{1+|\lambda|}$ from any face of dimension 1, and at distance $\geq\frac{\epsilon_0}{1+|\lambda|}$ from the origin. And like this we get successively, for each $d\in\mathbb{N}$, constants $\epsilon_d>0$ and C_d associated to the faces of dimension d. Eventually we conclude with the first step. ■

We can now derive the fundamental estimate :

Theorem 2.3.4 *Let p and q be polynomials of degree M and N. Then there exists a constant C such that, for all $\lambda\in\mathfrak{h}$ and for all $x\in\mathfrak{a}$,*

$$|p(\frac{\partial}{\partial\lambda})q(\frac{\partial}{\partial x})G_\lambda(x)| \leq C(1+|x|)^M(1+|\lambda|)^N F_0(x)e^{\max_w\Re(w\lambda,x)}.$$

Proof of the Theorem : The proof is standard. Theorem 2.3.4 is deduced from Proposition 2.3.2 using Cauchy's formula. More precisely, one integrates $G_\lambda(x)$ in the variable λ over n-tori with radii comparable to $\frac{1}{1+|x|}$. ■

Remark 2.3.2 This estimate holds true for F_λ too.

2.4 Hypergeometric Fourier transform and Schwartz spaces

We first recall the definitions of the hypergeometric Fourier transform and of its inverse, according to Cherednik [C2]. Let μ be the measure on $\mathfrak{a}$ given by

$$d\mu(x) = \underbrace{\prod_{\alpha\in\mathcal{R}^+} |2\sinh(\frac{\alpha}{2}, x)|^{2k_\alpha}}_{:=\delta(x)} dx.$$

The hypergeometric Fourier transform $\mathcal{H}$ is defined for nice functions f on $\mathfrak{a}$ by

$$\mathcal{H}(f)(\lambda) = \int_{\mathfrak{a}} f(x)G_\lambda(-x)d\mu(x),\ \forall\lambda\in\mathfrak{h}. \tag{2.22}$$

Let ν be the asymmetric Plancherel measure on $i\mathfrak{a}$ defined by

$$d\nu(\lambda) = c\prod_{\alpha\in\mathcal{R}^+} \frac{\Gamma((\lambda,\alpha^\vee)+k_\alpha+\frac{1}{2}k_{\alpha/2})\Gamma(-(\lambda,\alpha^\vee)+k_\alpha+\frac{1}{2}k_{\alpha/2}+1)}{\Gamma((\lambda,\alpha^\vee)+\frac{1}{2}k_{\alpha/2})\Gamma(-(\lambda,\alpha^\vee)+\frac{1}{2}k_{\alpha/2}+1)} d\lambda,$$

where c is a normalizing constant. The inverse transform $\mathcal{I}$ is given for nice functions h by

$$\mathcal{I}(h)(x) = \int_{i\mathfrak{a}} h(\lambda)G_\lambda(x)d\nu(\lambda),\ \forall x\in\mathfrak{a}. \tag{2.23}$$

In the case $k=0$, $\mathcal{H}$ and $\mathcal{I}$ reduce to the classical Euclidean Fourier transform

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = \int_{\mathfrak{a}} f(x)e^{-(\lambda,x)}dx$$

and its inverse

$$\mathcal{F}^{-1}(h)(x) = (2\pi)^{-n}\int_{i\mathfrak{a}} h(\lambda)e^{(\lambda,x)}d\lambda.$$

We shall consider the following function spaces. The classical Schwartz space on $i\mathfrak{a}$ is denoted by $\mathcal{S}(i\mathfrak{a})$. Its topology is defined by the semi-norms

$$\tau_{p,N}(h) = \sup_{\lambda\in i\mathfrak{a}} (1+|\lambda|)^N |p(\frac{\partial}{\partial\lambda})h(\lambda)|,$$

where p is any polynomial and $N\in\mathbb{N}$. As usual $C_c^\infty(\mathfrak{a})$ denotes the space of C^∞ functions on $\mathfrak{a}$ with compact support and $C_\Gamma^\infty(\mathfrak{a})$ the subspace of functions with support in a given compact subset Γ. Let us denote by $\mathcal{C}(\mathfrak{a})$ the space of C^∞ functions on $\mathfrak{a}$, such that for all polynomials p and all $N \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{x\in\mathfrak{a}}(1+|x|)^N F_0(x)^{-1}|p(\frac{\partial}{\partial x})f(x)| < +\infty,$$

It is the Schwartz space on $\mathfrak{a}$ associated to the measure μ. Its topology is defined by the semi-norms

$$\sigma_{p,N}(f) = \sup_{x\in\mathfrak{a}}(1+|x|)^N F_0(x)^{-1}|p(\frac{\partial}{\partial x})f(x)|.$$

Notice that according to Proposition 2.3.1, we may replace $F_0(x)$ by $e^{-(\rho,x^+)}$ in the definition of $\mathcal{C}(\mathfrak{a})$ and its topology. Let us recall that x^+ is the only point in the orbit $W \cdot x$ which lies in $\overline{\mathfrak{a}_+}$.

Lemma 2.4.1 *1. $\mathcal{C}(\mathfrak{a})$ is a Fréchet space.*

2. $C_c^\infty(\mathfrak{a})$ is a dense subspace of $\mathcal{C}(\mathfrak{a})$.

Proof of the lemma : These facts are standard. The second one is proved for example in [D], more precisely in Appendix A by M. Tinfou. ■

Eventually, the Paley-Wiener space $PW(\mathfrak{h})$ consists of all entire functions h on $\mathfrak{h}$ which satisfy the following growth condition :

$$\exists R \geq 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \sup_{\lambda\in\mathfrak{h}}(1+|\lambda|)^N e^{-R|\Re\lambda|}h(\lambda) < \infty.$$

Given a W-invariant convex compact subset Γ in $\mathfrak{a}$, $PW_\Gamma(\mathfrak{h})$ denotes the subspace of $PW(\mathfrak{h})$ defined by the specific condition

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \sup_{\lambda\in\mathfrak{h}}(1+|\lambda|)^N e^{-\gamma(-\Re\lambda)}h(\lambda) < \infty.$$

Here $\gamma(\lambda) = \sup_{x\in\Gamma}(\lambda, x)$ is the gauge associated to the polar of Γ.
The mapping properties of the hypergeometric Fourier transform were investigated by Opdam [O1] and revisited by Cherednik [C1]. Here are two main results

(i) Paley-Wiener theorem : $\mathcal{H}$ and $\mathcal{I}$ are (up to positive constants) inverse isomorphisms between $C_c^\infty(\mathfrak{a})$ and $PW(\mathfrak{h})$.

(ii) Plancherel type formula :

$$\int_{\mathfrak{a}} f(x)g(-x)d\mu(x) = \text{const}\cdot\int_{i\mathfrak{a}}\mathcal{H}f(\lambda)\mathcal{H}g(\lambda)d\nu(\lambda).$$

Opdam [O1] proved eventually a more precise Paley-Wiener theorem : $\mathcal{H}$ and $\mathcal{I}$ map $C_\Gamma^\infty(\mathfrak{a})$ and $PW_\Gamma(\mathfrak{h})$ into each other (and hence are inverse maps, up to a positive constant), where Γ is the convex hull of any W-orbit $W \cdot x$ in $\mathfrak{a}$. The proof works as well for the polar sets

$$\Gamma = \{x \in \mathfrak{a} \mid (\Lambda^+, x^+) \leq 1\}$$

where Λ is any regular element in $\mathfrak{a}$. We shall need this version of the Paley-Wiener theorem with positive multiples of ρ.
We are now able to resume Anker's approach [A2] in order to analyze the hypergeometric Fourier transform in the Schwartz class. The following type of result was already obtained by Delorme [D], following Harish-Chandra's strategy. On one hand, Delorme considers only W-invariant functions but, on the other hand, he deals with the more difficult case where $k < 0$.

Theorem 2.4.1 *The hypergeometric Fourier transform $\mathcal{H}$ and its inverse $\mathcal{I}$ are topological isomorphisms between $\mathcal{C}(\mathfrak{a})$ and $\mathcal{S}(i\mathfrak{a})$.*

Sketch of the proof : The proof is divided in two parts which correspond to the following two lemmas. The first one is elementary.

Lemma 2.4.2 *The hypergeometric Fourier transform $\mathcal{H}$ maps $\mathcal{C}(\mathfrak{a})$ continuously into $\mathcal{S}(i\mathfrak{a})$.*

Lemma 2.4.3 *The inverse transform $\mathcal{I} : PW(i\mathfrak{a}) \to C_c^\infty(\mathfrak{a})$ is continuous for the topology inherited from $\mathcal{S}(i\mathfrak{a})$ and $\mathcal{C}(\mathfrak{a})$ respectively.*

Proof of the lemma : Let $h \in PW$ and $f = \mathcal{I}(h)$. Given a semi-norm $\sigma = \sigma_{p,N}$ on $\mathcal{C}(\mathfrak{a})$, we must find a semi-norm τ on $\mathcal{S}(i\mathfrak{a})$ such that

$$\sigma_{p,N}(f) \leq \tau(h).$$

We denote by g the image of h by the inverse Euclidean Fourier transform $\mathcal{F}^{-1}$. According to the Paley-Wiener theorems for the hypergeometric and the Euclidean Fourier transforms, we have the following support conservation property : $\operatorname{supp}(f)$ is contained in $\Gamma_r = \{x \in \mathfrak{a} \mid (\rho, x^+) \leq r\}$ if and only if $\operatorname{supp}(g) \subset \Gamma_r$. Let $\omega_j \in C^\infty(\mathfrak{a})$ such that $\omega_j = 0$ inside Γ_{j-1}, $\omega_j = 1$ outside Γ_j, and ω_j is uniformly bounded in $j \in \mathbb{N}^*$, as well as each derivative. Set $g_j = \omega_j g$, $h_j = \mathcal{F}(g_j)$ and $f_j = \mathcal{I}(h_j)$. Here is a crucial observation : we have $g_j = g$ outside Γ_j, hence $f_j = f$ outside Γ_j, by the above support property. Let us estimate $f = f_j$ on $\Gamma_{j+1} \smallsetminus \Gamma_j$. First of all, using Proposition 2.3.2, there exist $N' \in \mathbb{N}$ and $C > 0$ such that

$$\sup_{x \in \Gamma_{j+1} \smallsetminus \Gamma_j} (1 + |x|)^N F_0(x)^{-1} |p(\frac{\partial}{\partial x}) f_j(x)| < C j^N \tau_{1,N'}(h_j).$$

Next, by Euclidean Fourier analysis

$$\tau_{1,N'}(h_j) \leq C \sum_{l=0}^{N'} \sup_{x \in \mathfrak{a}} (|x| + 1)^{n+1} |\nabla^l g_j(x)|.$$

Observe that g_j and its derivatives vanish in Γ_{j-1}. Hence

$$j^N \tau_{1,N'}(h_j) \leq C \sum_{l=0}^{N'} \sup_{x \in \mathfrak{a} \smallsetminus \Gamma_{j-1}} (|x| + 1)^{N+n+1} |\nabla^l g(x)|.$$

Again, by Euclidean Fourier analysis,

$$\sum_{l=0}^{N'} \sup_{x\in\mathfrak{a}} (|x|+1)^{N+n+1} |\nabla^l g(x)| \leq C\tau_{N+n+1,N''}(h).$$

In summary, there exist $N'' \in \mathbb{N}$ and $C > 0$ such that, for every $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\sup_{x\in\Gamma_{j+1}\smallsetminus\Gamma_j} (1+|x|)^N F_0(x)^{-1} |p(\frac{\partial}{\partial x}) f(x)| \leq C\tau_{N+n+1,N''}(h).$$

The remaining estimate of f in Γ_1 is elementary. ∎

In the W-invariant setting, the hypergeometric Fourier transform and its inverse may be written

$$\mathcal{H}(f)(\lambda) = \int_{\mathfrak{a}} f(x) F_\lambda(-x) d\mu(x)$$

and

$$\mathcal{I}(h)(\lambda) = \int_{i\mathfrak{a}} h(\lambda) F_\lambda(x) d\nu'(\lambda)$$

where

$$\begin{aligned} d\nu'(\lambda) &= \text{const} \cdot \prod_{\alpha\in\mathcal{R}^+} \frac{\Gamma((\lambda,\alpha^\vee)+k_\alpha+\frac{1}{2}k_{\alpha/2})\Gamma(-(\lambda,\alpha^\vee)+k_\alpha+\frac{1}{2}k_{\alpha/2})}{\Gamma((\lambda,\alpha^\vee)+\frac{1}{2}k_{\alpha/2})\Gamma(-(\lambda,\alpha^\vee)+\frac{1}{2}k_{\alpha/2})} d\lambda \\ &= \text{const} \cdot \mathbf{c}(\lambda)^{-1}\mathbf{c}(-\lambda)^{-1}\, d\lambda \end{aligned}$$

is the symmetric Plancherel measure or Harish-Chandra measure (see [C2]). We denote by $\mathcal{C}(\mathfrak{a})^W$ and $\mathcal{S}(i\mathfrak{a})^W$ the spaces of W-invariant functions of $\mathcal{C}(\mathfrak{a})$ and $\mathcal{S}(i\mathfrak{a})$ respectively, which we identify also with their restriction to $\overline{\mathfrak{a}_+}$. From Theorem 2.4.1 we get

Corollary 2.4.1 *These transforms are topological isomorphisms between* $\mathcal{C}(\mathfrak{a})^W$ *and* $\mathcal{S}(i\mathfrak{a})^W$.

We recover this way the main result of [D] in the easy case $k > 0$.

2.5 The heat kernel

2.5.1 Solution to the Cauchy problem

In this section we solve the heat equation (with Cauchy data) for the Heckman–Opdam Laplacian. We follow essentially the presentation of Rösler [Ros1] section 4, and refer to this article for some proofs, which are identical in our setting. We denote by $\mathcal{D}$ the modified Laplacian defined by

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}(\mathcal{L} - |\rho|^2).$$

The heat operator H is defined by

$$H = \partial_t - \mathcal{D}$$

on $C^{2,1}(\mathfrak{a} \times \mathbb{R})$. We consider the standard Cauchy problem : Given a continuous bounded function f on $\mathfrak{a}$, find $u \in C^{2,1}(\mathfrak{a} \times (0, +\infty)) \cap C^0(\mathfrak{a} \times [0, +\infty))$, such that

$$\begin{cases} Hu = 0 & \text{on } \mathfrak{a} \times (0, +\infty) \\ u(\cdot, 0) = f. \end{cases} \tag{2.24}$$

Definition 2.5.1 *The heat kernel $p_t(x, y)$ is defined for $x, y \in \mathfrak{a}$ and $t > 0$ by*

$$p_t(x, y) = \int_{i\mathfrak{a}} e^{-\frac{t}{2}(|\lambda|^2 + |\rho|^2)} G_\lambda(x) G_\lambda(-y) d\nu(\lambda). \tag{2.25}$$

The heat semigroup $(P_t, t \geq 0)$ is defined for $f \in \mathcal{C}(\mathfrak{a})$ and $t \geq 0$ by

$$P_t f(x) := \begin{cases} \int_{\mathfrak{a}} p_t(x, y) f(y) d\mu(y) & \text{if } t > 0 \\ f(x) & \text{if } t = 0. \end{cases}$$

Using the hypergeometric Fourier transform and its inverse, we can express the heat semigroup as follows

$$P_t f = \mathcal{I}(\lambda \mapsto e^{-\frac{t}{2}(|\lambda|^2 + |\rho|^2)} \mathcal{H}(f)(\lambda))$$

and deduce its basic properties which are summarized in the following theorem (the analogue of Theorem 4.7 in [Ros1]).

Theorem 2.5.1 *1. $(P_t, t \geq 0)$ is a strongly continuous semigroup on $\mathcal{C}(\mathfrak{a})$.*

2. Let $f \in \mathcal{C}(\mathfrak{a})$. Then $u(x, t) = P_t f(x)$ solves the Cauchy problem (2.24).

As in the Dunkl setting, we show next that $(P_t, t \geq 0)$ can be extended to a strongly continuous semigroup on $C_0(\mathfrak{a})$ (the space of continuous functions $f : \mathfrak{a} \to \mathbb{C}$ which vanish at infinity, equipped with the norm $|f|_\infty = \sup_{x \in \mathfrak{a}} |f(x)|$). Consider $\mathcal{D}$ as a densely defined linear operator on $C_0(\mathfrak{a})$ with domain $\mathcal{C}(\mathfrak{a})$.

Proposition 2.5.1 *1. The operator $(\mathcal{D}, \mathcal{C}(\mathfrak{a}))$ has a closure, which generates a Feller semigroup $(T(t), t \geq 0)$ on $C_0(\mathfrak{a})$.*

2. $T(t)$ coincides with P_t on $\mathcal{C}(\mathfrak{a})$.

Proof of the Proposition :

1. In order to apply the Hille-Yosida Theorem (see [E–K] Theorem 2.2 p.165) we need to check the following two properties :
   (a) Let $f \in \mathcal{C}(\mathfrak{a})$. Assume that x_0 is a global maximum of f. Then $\mathcal{D}f(x_0) \leq 0$ (this is the positive maximum principle).
   (b) $(\mu I - \mathcal{D})(\mathcal{C}(\mathfrak{a}))$ is dense in $C_0(\mathfrak{a})$ for some $\mu > 0$.

(a) follows from the explicit expression (2.1) of $\mathcal{L}$. For (b) we prove with Theorem 2.4.1 that $(\mu I - \mathcal{D})$ maps $\mathcal{C}(\mathfrak{a})$ onto itself for every $\mu > 0$. In fact if $f \in \mathcal{C}(\mathfrak{a})$, then

$$\mathcal{H}((\mu I - \mathcal{D})f)(\lambda) = (\mu + \frac{|\rho|^2 + |\lambda|^2}{2})\mathcal{H}(f)(\lambda),\ \lambda \in i\mathfrak{a}.$$

2. The equality $T(t)f = P_t f$ results from the uniqueness of the solution to (2.24) within the class of all differentiable functions on $[0, \infty)$ with values in $C_0(\mathfrak{a})$ (see [Ros1]). ■

Corollary 2.5.1 *The heat kernel $p_t(x, y)$ is positive on $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \times (0, \infty)$, symmetric in (x, y), and satisfies the following properties :*

1. For all $x, y \in \mathfrak{a}$, for all $t > 0$ and all $w \in W$, $p_t(wx, wy) = p_t(x, y)$.

2. For all $t > 0$ and $x \in \mathfrak{a}$, $p_t(x, \cdot) \in \mathcal{C}(\mathfrak{a})$.

3. Let $f \in C_b(\mathfrak{a})$. Then

$$u(x,t) = P_t f(x) = \begin{cases} \int_{\mathfrak{a}} p_t(x, y) f(y) d\mu(y) & \text{if } t > 0 \\ f(x) & \text{if } t = 0 \end{cases}$$

is still a solution to the Cauchy problem (2.24).

4. For all $t > 0$ and all $x \in \mathfrak{a}$, $\int_{\mathfrak{a}} p_t(x, y) d\mu(y) = 1$.

Proof of the corollary : The positivity property results from the last proposition, which implies that $P_t f \geq 0$ for any $f \in \mathcal{C}(\mathfrak{a})$ with $f \geq 0$. Thus (see [Ros1]) $p_t(x, y) \geq 0$ for all $t > 0$ and $x, y \in \mathfrak{a}$, by continuity of $p_t(x, \cdot)$. The invariance of p_t under the Weyl group results from the invariance of $\mathcal{D}$ when $\mathcal{R}^+$ is replaced by $w\mathcal{R}^+$, for any $w \in W$. The symmetry of p_t results in the same way from its invariance by $-Id$, and from Formula (2.25). The second and third assumptions are classical and result from basic properties of the G_λ (see [Ros1]). The last assumption results from the point 3 and the fact that $T(t)1 = 1$ (because $\mathcal{D}$ is conservative, see [E–K] p.166). ■

The W-invariant heat kernel p_t^W is defined for all $x, y \in \mathfrak{a}$ and $t > 0$ by

$$\begin{aligned} p_t^W(x, y) &= \sum_{w \in W} p_t(x, wy) = \frac{1}{|W|} \sum_{w, w' \in W} p_t(wx, w'y) \\ &= \int_{i\mathfrak{a}} e^{-\frac{t}{2}(|\lambda|^2 + |\rho|^2)} F_\lambda(x) F_\lambda(-y) d\nu'(\lambda). \end{aligned}$$

The W-invariant semigroup $(P_t^W, t \geq 0)$ is defined for $f \in \mathcal{C}(\overline{\mathfrak{a}_+})$, $x \in \overline{\mathfrak{a}_+}$ and $t \geq 0$, by

$$P_t^W f(x) = \int_{\mathfrak{a}_+} p_t^W(x, y) f(y) d\mu(y),\ \text{if } t > 0,$$

and $P_0^W f(x) = f(x)$. We have the analogue of Theorem 2.5.1. The generator of $(P_t^W, t \geq 0)$ is equal on $\mathcal{C}(\mathfrak{a})^W$ to the differential part D of $\mathcal{D}$. The analogue of Proposition 2.5.1 for D, is a consequence of Corollary 2.4.1 and the following lemma. The second claim of this lemma will be used in [Sch1].

Lemma 2.5.1 *The space $\mathcal{C}(\mathfrak{a})^W$ is dense in $C_0(\overline{\mathfrak{a}_+})$. Moreover if $f \in C_c^\infty(\overline{\mathfrak{a}_+})$, there exists a sequence $(u_j)_j \in \mathcal{C}(\overline{\mathfrak{a}_+})^W$ which converges uniformly to f, such that there exists a positive constant $C > 0$, independent of j, such that $|\nabla u_j(x)| \le C$ for all $x \in \overline{\mathfrak{a}_+}$, and if $d(x, \partial\mathfrak{a}_+) > \frac{1}{j}$, then $|\Delta u_j(x)| \le C$, whereas if $d(x, \partial\mathfrak{a}_+) \le \frac{1}{j}$, then $|\frac{\Delta u_j(x)}{j}| \le C$.*

Proof of the lemma : The density result is a consequence of the Stone-Weierstrass theorem. However here we need more information, so we need the usual technique of regularization by convolution with an approximate unity. Let $f \in C_c^\infty(\overline{\mathfrak{a}_+})$. We can extend it to $\mathfrak{a}$ by W-symmetry, and we get a function $\tilde{f}$ which is symmetric, and Lipschitz. Let u be an approximate of unity, which is a W-symmetric C^∞ function, with compact support in the unit ball, and with integral equal to one. Then we consider the sequence of functions $(u_j)_j$ defined by $u_j(x) := \int_{\mathfrak{a}} \tilde{f}(x-y) j^n u(jy)dy$ for $x \in \mathfrak{a}$. It is classical to see that u_j is C^∞ and converges uniformly to $\tilde{f}$. It is also immediate that u_j is W-symmetric. To see that it has the required properties, observe that $\tilde{f}$ is derivable (in the sense of distributions) with a bounded derivative near the walls, and it is C^∞ away from the walls. ■

We set $h_t(x) = p_t(0,x) = \frac{1}{|W|} p_t^W(0,x)$ for $x \in \overline{\mathfrak{a}_+}$, and $t > 0$. We have the formula :

$$h_t(x) = \int_{i\mathfrak{a}} e^{-\frac{t}{2}(|\lambda|^2 + |\rho|^2)} F_\lambda(x) d\nu'(\lambda). \tag{2.26}$$

We will now prove that the heat kernel is in fact strictly positive. As usually we will prove this fact by using a strong minimum principle. The result may be found in [Pro–Wei], but stated in a slightly different way. Thus we include a proof.

Lemma 2.5.2 (Strong minimum principle) *Let $t_0 \in \mathbb{R}$. Let $u \in C^{2,1}(\mathfrak{a} \times (t_0, +\infty)) \cap C(\mathfrak{a} \times [t_0, +\infty))$. Assume that $Hu \ge 0$ on $\mathfrak{a} \times (t_0, +\infty)$, $u \ge 0$ on $\mathfrak{a} \times [t_0, +\infty)$, and $u(0,t) > 0$, for all $t \ge t_0$. Then $u > 0$ on $\mathfrak{a} \times (t_0, +\infty)$.*

Proof of the lemma : Consider the ellipsoid

$$E \ : \ |x|^2 + \gamma(t - t_0)^2 < \delta.$$

Assume that $u > 0$ on E, and that $u(x_*, t_*) = 0$ for some $(x_*, t_*) \in \partial E$, with $t* > t_0$. By hypothesis (x_*, t_*) can not be the north pole. Moreover by reducing E if necessary, we can always suppose that it is the only point in $\overline{E} \cap \{t > t_0\}$ where u vanishes. We shall perturb u in a small ball

$$B \ : \ |x - x_*|^2 + (t - t_*)^2 < \epsilon^2,$$

with $0 < \epsilon < \min(\frac{1}{2}|x_*|, \frac{1}{2}(t^* - t_0)^2)$. Consider the auxiliary function

$$\omega(x,t) = e^{-r\delta} - e^{-r\{|x|^2 + \gamma(t-t_0)^2\}}.$$

Let us compute and estimate

$$\begin{aligned} H\omega(x,t) &= 2r\Big\{2r|x|^2 - 1 + \gamma(t - t_0) - \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} k_\alpha(\alpha, x) \coth(\frac{\alpha}{2}, x)\Big\} \\ &\times \ e^{-r\{|x|^2 + \gamma(t-t_0)^2\}}. \end{aligned}$$

This expression can be made strictly positive on $\overline{B}$, by choosing $r > 0$ sufficiently large. The function $v = u + \epsilon' \omega$

- is strictly positive on $\overline{B} \setminus \overline{E}$, since $\omega > 0$ outside of $\overline{E}$,
- is equal to u on $\overline{B} \cap \partial E$, since ω vanishes on ∂E,
- can be made strictly positive on $\partial B \cap \overline{E}$ by choosing $\epsilon' > 0$ sufficiently small.

Thus the minimum $v_* \leq 0$ of v on $\overline{B}$ is achieved at an inner point. There $\partial_t v = 0$, $\nabla v = 0$, and $\Delta v \geq 0$. Hence $Hv \leq 0$. But on the other side $Hv = Hu + \epsilon' H\omega > 0$, and we have a contradiction. ■

We can deduce from this lemma the

Corollary 2.5.2 *The heat kernel $p_t(x,y)$ is strictly positive on $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \times (0,+\infty)$.*

Proof of the corollary : First we apply the preceding lemma for the function $u(x,t) = h_t(x)$. We have simply to prove that $h_t(0)$ is strictly positive for all $t > 0$. This comes from Formula (2.26). Moreover since the preceding lemma may be applied for any $t_0 > 0$, we get that $p_t(x,0) > 0$ for any $t > 0$ and $x \in \mathfrak{a}$. Suppose now that $p_t(x,y) = 0$ for some $x, y \in \mathfrak{a} - \{0\}$ and $t > 0$. We have

$$p_t(x,y) = \int_{\mathfrak{a}} p_{\frac{t}{2}}(x,z) p_{\frac{t}{2}}(z,y) d\mu(z).$$

But as p is positive and continuous, this implies that $p_{\frac{t}{2}}(x,0) p_{\frac{t}{2}}(0,y) = 0$, and we get a contradiction. ■

Remark 2.5.1 Since the space $\mathcal{C}(\mathfrak{a})$ is dense in all the $L^p(\mathfrak{a},\mu)$ spaces, for $p \in [1,\infty)$, the Hille-Yosida theorem (cf [E–K]) assures that $\mathcal{D}$ is closable on $L^p(\mathfrak{a},\mu)$ and generates a heat semigroup $(T^{(p)}(t), t \geq 0)$, which is strongly continuous. Moreover, still by an argument of uniqueness in the Cauchy problem, we see that $T^{(p)}$ coincides with the preceding operator P on $\mathcal{C}(\mathfrak{a})$. And by continuity we see that $T^{(p)}$ is just the natural extension of P on $L^p(\mathfrak{a},\mu)$. It is equal for $f \in L^p(\mathfrak{a},\mu)$, $x \in \mathfrak{a}$, and $t > 0$, to

$$T^{(p)}(t) f(x) = P_t f(x) = \int_{\mathfrak{a}} p_t(x,y) f(y) d\mu(y).$$

Obviously the same discussion applies in the radial situation (with D and P^W in place of $\mathcal{D}$ and P respectively).

2.5.2 Estimates and asymptotic of the heat kernel

In this subsection we establish a sharp global estimate of h_t (Theorem 2.5.2) and an asymptotic of $p_T(x, \sqrt{T}y)$ when $T \to \infty$ (Proposition 2.5.3). Let $\gamma := \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+} k_\alpha$, and as usual for $x \in \mathfrak{a}$, we denote by x^+ its conjugate in $\overline{\mathfrak{a}_+}$. A problem in order to get global estimate of p_t is that it is not a convolution operator. Thus $p_t(\cdot,\cdot)$ can not be simply expressed in terms of the function $h_t(\cdot)$. Therefore the next Theorem is only a partial result. A better one could be obtain if we had a global estimate of the Dunkl kernel.

Theorem 2.5.2 *The following global estimate holds, for all $t > 0$ and $x \in \mathfrak{a}$:*

$$\begin{aligned} h_t(x) &\asymp t^{-\gamma-\frac{n}{2}} \left\{ \prod_{\alpha\in\mathcal{R}_0^+} (1+|(\alpha,x)|)(1+t+|(\alpha,x)|)^{k_\alpha+k_{2\alpha}-1} \right\} \\ &\times \; e^{-|\rho|^2\frac{t}{2}-(\rho,x^+)-\frac{|x|^2}{2t}}. \end{aligned}$$

Proof of the theorem : Thanks to Theorem 2.3.3, and the known expression of the heat kernel associated to the Dunkl Laplacian [Ros1], we can use exactly the same proof as in [A–Ost1]. In this proof use was made of the heat kernel in balls of radius $R > 0$ with boundary conditions. This may be avoided by using weak parabolic minimum (or maximum) principles for unbounded domains, which hold also because the heat kernel vanishes at infinity. ∎

Our next result gives an equivalent of $p_T(x, \sqrt{T}y)$ when T tends to ∞. This result will be needed in [Sch1] for the proof of the convergence of the normalized F_0-process. However since the proof is easier in the W-invariant case, we begin by the analogous result for $p_T^W(x, \sqrt{T}y)$. Then we will simply explain what has to be modified in the non-invariant setting.

Proposition 2.5.2 *There exists a constant $K > 0$, such that for any $x \in \overline{\mathfrak{a}_+}$ and any $y \in \mathfrak{a}_+$,*

$$p_T^W(x, \sqrt{T}y) \sim K e^{-\frac{|y|^2}{2}} T^{-\frac{n}{2}-|\mathcal{R}_0^+|} e^{-\frac{|\rho|^2}{2}T} F_0(-x) F_0(\sqrt{T}y),$$

when $T \to +\infty$.

Proof of the proposition : We resume the "analysis away from walls" carried out in [A–Ji]. It consists in expanding F_λ in the heat kernel expression

$$p_T^W(x, \sqrt{T}y) = \int_{i\mathfrak{a}} e^{-\frac{T}{2}(|\lambda|^2+|\rho|^2)} F_\lambda(-x) F_\lambda(\sqrt{T}y) d\nu'(\lambda) \tag{2.27}$$

using the Harish-Chandra series [H–O]

$$F_\lambda(y) = \sum_{w\in W} \mathbf{c}(w\lambda) e^{(w\lambda-\rho,y)} \sum_{q\in Q^+} \Gamma_q(w\lambda) e^{-(q,y)}.$$

Recall that this expression holds for $y \in \mathfrak{a}_+$. Now we replace $F_\lambda(\sqrt{T}y)$ by its development in series in the integral (2.27). The properties of the coefficients q_χ allow us to invert the integral term and the series (see [A–Ji] for more details). Therefore we get

$$p_T^W(x, \sqrt{T}y) = \sum_{q\in Q^+} E_q(x,y) e^{-\frac{|\rho|^2}{2}T-(\rho+q,\sqrt{T}y)} \tag{2.28}$$

where (using the W-invariance of ν' in λ), for $x, y \in \mathfrak{a}$,

$$E_q(x,y) = K\int_{i\mathfrak{a}} e^{-\frac{T}{2}|\lambda|^2+(\lambda,\sqrt{T}y)}F_\lambda(-x)c(\lambda)\Gamma_q(\lambda)d\nu'(\lambda).$$

Here K is a constant whose value may change in the sequel. We denote by $\mathbf{b}'$ the function defined by

$$\mathbf{b}'(\lambda)\frac{\mathbf{c}(\lambda)}{\pi(\lambda)}d\nu'(\lambda) = d\lambda.$$

It is holomorphic in zero. Observe now that

$$\pi(\frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial_\lambda})e^{-\frac{T}{2}|\lambda|^2} = \pi(-\lambda)e^{-\frac{T}{2}|\lambda|^2}.$$

This formula comes from the fact that there are no skew symmetric polynomial of strictly lower degree than $|\mathcal{R}_0^+|$. Thus the function E_0 may be rewritten as

$$E_0(x,y) = K\int_{i\mathfrak{a}} e^{-\frac{T}{2}|\lambda|^2}\pi(\frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial_\lambda})\{e^{(\lambda,\sqrt{T}y)}F_\lambda(-x)b'(\lambda)^{-1}\}d\lambda.$$

Then we make the change of variables $v = \frac{y+\lambda}{\sqrt{T}}$, and we get

$$\begin{aligned} E_0(x,y)e^{-\frac{|\rho|^2}{2}T-(\rho,\sqrt{T}y)} &\sim KF_0(-x)e^{-\frac{T}{2}|\rho|^2-(\rho,\sqrt{T}y)-\frac{|y|^2}{2}}T^{-\frac{D}{2}}\pi(\sqrt{T}y) \\ &\times \int_{i\mathfrak{a}} e^{\frac{1}{2}|v|^2}\frac{F_{\frac{v-y}{\sqrt{T}}}(-x)}{F_0(-x)}b'^{-1}(\frac{v-y}{\sqrt{T}})dv. \end{aligned}$$

The preceding integral has a finite limit, independent of x and y, when T tends to infinity. Thus using the known asymptotic behavior of F_0 (Theorem 2.3.1), we conclude that the first term of the series in (2.28) has the desired asymptotic behavior. A similar study would show that the leading terms are negligible. This concludes the proof of the proposition. ■

Proposition 2.5.3 *There exists a constant $K > 0$, such that for any $x \in \mathfrak{a}$, and any $y \in \mathfrak{a}_{reg}$, if $wy \in \mathfrak{a}_+$, then*

$$p_T(x,\sqrt{T}y) \sim Ke^{-\frac{|y|^2}{2}}T^{-\frac{n}{2}-|\mathcal{R}_0^+|}e^{-\frac{|\rho|^2}{2}T}G_0(wx)F_0(\sqrt{T}y),$$

when $T \to +\infty$.

Proof of the proposition : The proof is similar to the preceding proposition. First we have $p_T(x,\sqrt{T}y) = p_T(wx, w\sqrt{T}y)$. Then in the integral expression of $p_T(wx, w\sqrt{T}y)$, we replace $G_\lambda(-w\sqrt{T}y)$ by its development in series. Since $-wy \in \mathfrak{a}_-$, we already know the dominant term of the development. Indeed they were computed by Opdam in [O1] : they are all zero except one which is equal to $\pi(\lambda)$, up to a constant. But $\pi(\lambda)d\nu(\lambda)$ behaves like $d\nu'(\lambda)$ in zero, i.e. like $|\pi(\lambda)|^2$. Thus we can follow the rest of the proof of the preceding proposition, and we get the result. ■

2.5.3 The Poisson equation for $\mathcal{D}$

Our sharp estimates of Theorem 2.3.4 allows us to prove the

Proposition 2.5.4 *Let $f \in L^1(\mathfrak{a}, \mu)$. Then the function $Gf : x \mapsto \int_0^\infty P_t f(x) dt$ is finite μ-a.e. If moreover $\mathcal{F}(f) \in L^1(i\mathfrak{a}, \nu)$, then Gf is bounded, belongs to $C^2(\mathfrak{a})$, and satisfies the Poisson equation $\mathcal{D}Gf = -f$.*

Proof of the proposition : Let $f \in L^1(\mathfrak{a}, \mu)$. For all x, and all $\epsilon > 0$, we have

$$\begin{aligned} |Gf(x)| &= \Big| \int_0^\infty e^{-\frac{t}{2}|\rho|^2} \int_{\mathfrak{a}} \int_{i\mathfrak{a}} e^{-\frac{t}{2}|\lambda|^2} G(\lambda, x) G(-\lambda, y) d\nu(\lambda) f(y) d\mu(y) dt \Big| \\ &\leq \Big| \int_0^1 P_t f(x) dt \Big| + C|f|_1 \int_1^\infty e^{-\frac{t}{2}|\rho|^2} \Big| \int_{i\mathfrak{a}} e^{-\frac{t}{2}|\lambda|^2} d\nu(\lambda) \Big| dt, \end{aligned}$$

where C is a constant. But since for any $t \geq 0$, P_t is a contraction on L^1, we have therefore $|P_t f|_1 \leq |f|_1$. Thus $| \int_0^1 P_t f dt|_1 \leq |f|_1 < \infty$. And then μ-a.e., $| \int_0^1 P_t f dt| < \infty$. Finally we get that μ a.e. $Gf < \infty$. This proves the first claim of the proposition. Now let $f \in L^1(\mathfrak{a}, \mu)$, be such that $\mathcal{F}(f) \in L^1(i\mathfrak{a}, \nu)$. Then we have

$$\begin{aligned} |Gf(x)| &\leq \int_{i\mathfrak{a}} \mathcal{F}(f)(\lambda) \int_0^\infty e^{-\frac{t}{2}|(|\lambda|^2 + \rho|^2)} dt d\nu(\lambda) \\ &\leq 2 \int_{i\mathfrak{a}} \frac{\mathcal{F}(f)(\lambda)}{|\lambda|^2 + |\rho|^2} d\nu(\lambda). \end{aligned}$$

This shows that Gf is bounded. Moreover using a theorem of differentiation under the integral, and our precise estimate of the derivatives of the functions G_λ, we see that $Gf \in C^2(\mathfrak{a})$ and satisfies $\mathcal{D}Gf = -f$. This finishes the proof of the proposition. ∎

2.6 Appendix : computation of the Heckman–Opdam Laplacian

First we give another expression of the Cherednik operator :

$$\begin{aligned} T_\xi f(x) &= \partial_\xi f(x) + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} \frac{k_\alpha}{2} (\alpha, \xi) \coth \frac{(\alpha, x)}{2} \{f(x) - f(r_\alpha.x)\} \\ &- \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} \frac{k_\alpha}{2} (\alpha, \xi) f(r_\alpha.x). \end{aligned}$$

Now we compute

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\alpha\in\mathcal{R}^+}\frac{k_\alpha}{2}\coth\frac{(\alpha,x)}{2}\{T_\alpha f(x)-T_\alpha f(r_\alpha.x)\}\\
=\;&\sum_{\alpha\in\mathcal{R}^+}\frac{k_\alpha}{2}\coth\frac{(\alpha,x)}{2}\{\partial_\alpha f(x)-\partial_\alpha f(r_\alpha.x)\}\\
+\;&\sum_{\alpha,\beta\in\mathcal{R}^+}\frac{k_\alpha k_\beta}{4}(\alpha,\beta)\coth\frac{(\alpha,x)}{2}\coth\frac{(\beta,x)}{2}\{f(x)-f(r_\alpha.x)\}\\
-\;&\sum_{\alpha,\underbrace{\beta}_{\beta'}\in\mathcal{R}^+}\frac{k_\alpha\overbrace{k_\beta}^{k'_\beta}}{4}\overbrace{(\alpha,\beta)}^{-(\alpha,\beta')}\coth\frac{(\alpha,x)}{2}\coth\frac{\overbrace{(\beta,r_\alpha.x)}^{(\beta',x)}}{2}\{f(r_\alpha.x)-f(\overbrace{r_\beta r_\alpha}^{r_\alpha r_{\beta'}}.x)\}\\
-\;&\sum_{\alpha,\beta\in\mathcal{R}^+}\frac{k_\alpha k_\beta}{4}(\alpha,\beta)\coth\frac{(\alpha,x)}{2}f(r_\beta.x)\\
+\;&\sum_{\alpha,\beta\in\mathcal{R}^+}\frac{k_\alpha k_\beta}{4}(\alpha,\beta)\coth\frac{(\alpha,x)}{2}f(r_\beta r_\alpha.x)\\
=\;&\sum_{\alpha\in\mathcal{R}^+}\frac{k_\alpha}{2}\coth\frac{(\alpha,x)}{2}\{\partial_\alpha f(x)-\partial_\alpha f(r_\alpha.x)\}\\
+\;&\sum_{\alpha,\beta\in\mathcal{R}^+}\frac{k_\alpha k_\beta}{4}(\alpha,\beta)\coth\frac{(\alpha,x)}{2}\coth\frac{(\beta,x)}{2}\{f(x)-f(r_\beta r_\alpha.x)\}\\
-\;&\sum_{\alpha,\beta\in\mathcal{R}^+}\frac{k_\alpha k_\beta}{4}(\alpha,\beta)\coth\frac{(\alpha,x)}{2}\{f(r_\beta.x)-f(r_\beta r_\alpha.x)\}.
\end{aligned}
$$

Thanks to the following lemma, we can remove the hyperbolic cotangent in the second sum.

Lemma 2.6.1 *Let $\mathcal{R}$ be an integral root system (non necessarily reduced). Then*

$$\sum_{\alpha,\beta\in\mathcal{R}^+,r_\beta\circ r_\alpha=\tau}k_\alpha k_\beta(\alpha,\beta)\{\coth\frac{(\alpha,x)}{2}\coth\frac{(\beta,x)}{2}-1\}=0$$

for all non-trivial rotation τ.

Proof of the lemma : Applying the Euclidean Laplacian to the Weyl denominator formula

$$\prod_{\alpha\in\mathcal{R}^+}\{e^{\frac{(\alpha,x)}{2}}-e^{-\frac{(\alpha,x)}{2}}\}=\sum_{w\in W}e^{(w.\rho,x)}$$

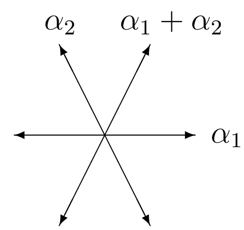
we get the identity

$$\sum_{\alpha,\beta\in\mathcal{R}^+,\alpha\neq\beta}(\alpha,\beta)\{\coth\frac{(\alpha,x)}{2}\coth\frac{(\beta,x)}{2}-1\}=0$$

which holds for all reduced root system. Now by restricting to the different root systems of rank 2, we see that this relation is equivalent to the lemma.

• $\mathbf{A_1\times A_1}$ **:** trivial.

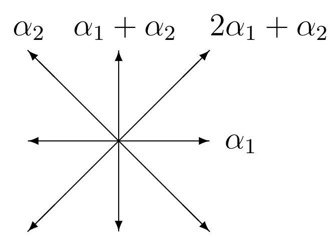
• $\mathbf{A_2}$ **:**



The lemma reduces to the identity

$$\frac{k^2}{2}\{-\coth\frac{\alpha_1}{2}\coth\frac{\alpha_2}{2}+\coth\frac{\alpha_1}{2}\coth\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+\coth\frac{\alpha_2}{2}\coth\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-1\}=0.$$

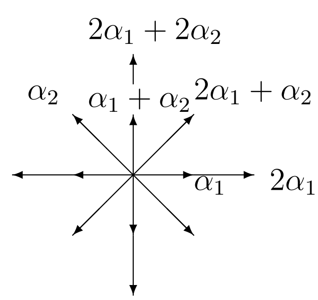
• $\mathbf{B_2=C_2}$ **:**



The lemma reduces to the identity

$$\begin{aligned}k_1k_2\{ &- \coth\frac{\alpha_1}{2}\coth\frac{\alpha_2}{2}+\coth\frac{\alpha_1}{2}\coth\frac{2\alpha_1+\alpha_2}{2}\\ &+ \coth\frac{\alpha_2}{2}\coth\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+\coth\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\coth\frac{2\alpha_1+\alpha_2}{2}-2\}=0.\end{aligned}$$

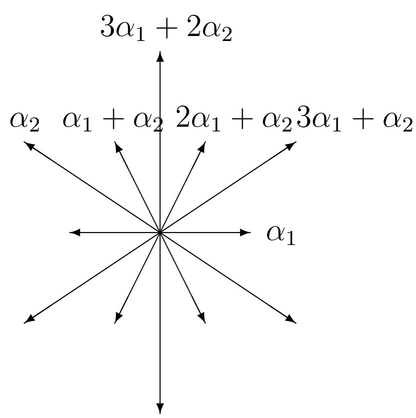
• $\mathbf{BC_2}$ **:**



The lemma reduces to the following identities of type $B_2 = C_2$

$$
\begin{aligned}
k_1k_2\{ \quad & - \quad \coth\frac{\alpha_1}{2}\coth\frac{\alpha_2}{2} + \coth\frac{\alpha_1}{2}\coth\frac{2\alpha_1+\alpha_2}{2} \\
& + \quad \coth\frac{\alpha_2}{2}\coth\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} + \coth\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\coth\frac{2\alpha_1+\alpha_2}{2} - 2\} = 0 \\
2k_2k_3\{ \quad & - \quad \coth\frac{\alpha_1}{2}\coth\frac{\alpha_2}{2} + \coth\frac{\alpha_1}{2}\coth\frac{2\alpha_1+\alpha_2}{2} \\
& + \quad \coth\frac{\alpha_2}{2}\coth\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} + \coth\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\coth\frac{2\alpha_1+\alpha_2}{2} - 2\} = 0.
\end{aligned}
$$

- $\mathbf{G_2}$:



The lemma reduces to the following identities, the last ones being of type A_2

$$
\begin{aligned}
\frac{3k_1k_2}{2}\{ \quad & - \quad \coth\frac{\alpha_1}{2}\coth\frac{\alpha_2}{2} + \coth\frac{\alpha_1}{2}\coth\frac{3\alpha_1+\alpha_2}{2} \\
& + \quad \coth\frac{\alpha_2}{2}\coth\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} + \coth\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\coth\frac{3\alpha_1+2\alpha_2}{2} \\
& + \quad \coth\frac{2\alpha_1+\alpha_2}{2}\coth\frac{3\alpha_1+\alpha_2}{2} + \coth\frac{2\alpha_1+\alpha_2}{2}\coth\frac{3\alpha_1+2\alpha_2}{2} - 4\} = 0 \\
\frac{k_1^2}{2}\{ \quad & - \quad \coth\frac{\alpha_1}{2}\coth\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} + \coth\frac{\alpha_1}{2}\coth\frac{2\alpha_1+\alpha_2}{2} \\
& + \quad \coth\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\coth\frac{2\alpha_1+\alpha_2}{2} - 1\} = 0 \\
\frac{3k_2^2}{2}\{ \quad & - \quad \coth\frac{\alpha_2}{2}\coth\frac{3\alpha_1+\alpha_2}{2} + \coth\frac{\alpha_2}{2}\coth\frac{3\alpha_1+2\alpha_2}{2} \\
& + \quad \coth\frac{3\alpha_1+\alpha_2}{2}\coth\frac{3\alpha_1+2\alpha_2}{2} - 1\} = 0.
\end{aligned}
$$

■

Eventually we get the expression of the Heckman–Opdam Laplacian :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}f(x) &= \sum_{j=1}^{n} T_{\xi_j}^2 f(x) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \partial_{\xi_j} T_{\xi_j} f(x) + \sum_{\alpha\in\mathcal{R}^+} \frac{k_\alpha}{2} \coth\frac{(\alpha,x)}{2} \overbrace{\sum_{j=1}^{n} (\alpha,\xi_j)\{T_{\xi_j} f(x) - T_{\xi_j} f(r_\alpha.x)\}}^{T_\alpha f(x) - T_\alpha f(r_\alpha.x)} \\
&- \sum_{\alpha\in\mathcal{R}^+} \frac{k_\alpha}{2} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (\alpha,\xi_j) T_{\xi_j} f(r_\alpha.x)}_{T_\alpha f(r_\alpha.x)} \\
&= \Delta f(x) + \sum_{\beta\in\mathcal{R}^+} \frac{k_\beta}{4} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (\beta,\xi_j)^2}_{|\beta|^2} \overbrace{(1-\coth^2\frac{(\beta,x)}{2})}^{-\sinh^{-2}\frac{(\beta,x)}{2}} \{f(x) - f(r_\beta.x)\} \\
&+ \sum_{\beta\in\mathcal{R}^+} \frac{k_\beta}{2} \coth\frac{(\beta,x)}{2} \overbrace{\sum_{j=1}^{n} (\beta,\xi_j)\{\partial_{\xi_j} f(x) - \partial_{r_\beta.\xi_j} f(r_\beta.x)\}}^{\partial_\beta f(x) + \partial_\beta f(r_\beta.x)} \\
&- \sum_{\beta\in\mathcal{R}^+} \frac{k_\beta}{2} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (\beta,\xi_j) \partial_{r_\beta.\xi_j} f(r_\beta.x)}_{-\partial_\beta f(r_\beta.x)} \\
&+ \sum_{\alpha\in\mathcal{R}^+} \frac{k_\alpha}{2} \coth\frac{(\alpha,x)}{2} \{\partial_\alpha f(x) - \partial_\alpha f(r_\alpha.x)\} \\
&+ \sum_{\alpha,\beta\in\mathcal{R}^+} \frac{k_\alpha k_\beta}{4} (\alpha,\beta)\{f(x) - f(r_\beta r_\alpha.x)\} \\
&- \sum_{\alpha,\beta\in\mathcal{R}^+} \frac{k_\alpha k_\beta}{4} (\alpha,\beta) \coth\frac{(\alpha,x)}{2} \{f(r_\beta.x) - f(r_\beta r_\alpha.x)\} \\
&- \sum_{\alpha,\underbrace{\beta}_{\beta'}\in\mathcal{R}^+} \frac{k_\alpha \overbrace{k_\beta}^{k'_\beta}}{4} \overbrace{(\alpha,\beta)}^{-(\alpha,\beta')} \coth\frac{\overbrace{\beta, r_\alpha.x)}^{(\beta',x)}}{2} \{f(r_\alpha.x) - f(\overbrace{r_\beta r_\alpha}^{r_\alpha r_{\beta'}}.x))\} \\
&+ \sum_{\alpha,\beta\in\mathcal{R}^+} \frac{k_\alpha k_\beta}{4} (\alpha,\beta) f(r_\beta r_\alpha.x) \\
&= \Delta f(x) + \sum_{\alpha\in\mathcal{R}^+} k_\alpha \coth\frac{(\alpha,x)}{2} \partial_\alpha f(x) + |\rho|^2 f(x) \\
&- \sum_{\alpha\in\mathcal{R}^+} k_\alpha \frac{|\alpha|^2}{4\sinh^2\frac{(\alpha,x)}{2}} \{f(x) - f(r_\alpha.x)\}.
\end{aligned}$$

Chapitre 3

Processus markoviens de Heckman–Opdam

Ce chapitre reprend pour l'essentiel l'article [Sch2], accepté à *Probability Theory and Related Fields*.

Résumé : *Nous introduisons et étudions l'analogue naturel des processus markoviens de Dunkl en courbure négative. Nous donnons une décomposition en semi-martingale de la partie radiale, et quelques propriétés des sauts. Nous démontrons également une loi des grands nombres, un théorème central limite, et la convergence des processus renormalisés vers les processus de Dunkl. Enfin nous décrivons le comportement asymptotique du lacet infini comme cela avait été fait par Anker, Bougerol et Jeulin dans le cadre des espaces symétriques [A–B–J].*

Abstract : *We introduce and study the natural counterpart of the Dunkl Markov processes in a negatively curved setting. We give a semimartingale decomposition of the radial part, and some properties of the jumps. We prove also a law of large numbers, a central limit theorem, and the convergence of the normalized process to the Dunkl process. Eventually we describe the asymptotic behavior of the infinite loop as was done by Anker, Bougerol and Jeulin in the symmetric spaces setting in [A–B–J].*

3.1 Introduction

In the last few years, some processes living in cones have played an important role in probability. The most famous example is maybe the planar Brownian motion with reflections on the boundary of the cone (see e.g. [LG], [Law–Schr–Wer] where it is linked with the Schramm's Stochastic Loewner Evolution, or [Dub]). But here we consider other processes which propagate in very special cones related with Riemannian geometry (we will precise this in a moment).

The cones that we consider are associated to a root system. Roughly speaking a root system is a set of vectors, satisfying a few conditions, in a Euclidean space (a precise definition will be given in the sequel). The set of hyperplane orthogonal to the vectors of the root system delimit cones, which are called the Weyl chambers. Usually one of the chamber is chosen arbitrarily and called the positive Weyl chamber. One of the first example of process with value in a Weyl chamber is the intrinsic Brownian motion (or IBM) introduced by Biane in [Bi1]. It may be simply defined as the Brownian motion killed on the boundary of the positive Weyl chamber, and conditioned to never reach it. In fact it was realized then, that this process appears in many branches of the probability theory. First in dimension 1, it is the Bessel-3 process. But in higher rank it appears also for instance in the theory of random matrices. A well known example is when the root system is of type A (a precise definition will be given in the next section), in which case the intrinsic Brownian motion is the process of eigenvalues of Hermitian matrices with Gaussian entries (the GUE ensemble) and trace zero. But it appears also in a lot of other areas, like interacting particle systems, directed percolation, or random permutations (see e.g. [OC] for a survey of these links). Let us also mention the recent work of Biane, Bougerol and O'Connell [Bi–B–OC], where the IBM appears as a natural generalization of the Bessel-3 process in dimension n, in the sense that it may be obtained by a transform of the Brownian motion in $\mathbb{R}^n$, which coincides in dimension 1 with the Pitman transform $2S - B$.

Now another way, more geometric and more interesting for our purpose, to define the IBM, is to consider the radial part of the Brownian motion on a complex Riemannian flat symmetric space. Let us immediately say that the reader does not need to be familiar with these notions (however well explained in [Hel]) in order to understand the content of that paper. We will just mention that these spaces are tangent spaces of so called Riemmanian symmetric spaces of noncompact type (see also [Hel]), which are Riemannian manifolds with negative curvature. So the natural counterpart of the IBM in a negative curvature setting is the radial part of the Brownian motion on symmetric spaces (of noncompact type). Such Brownian motion was also already well studied, e.g. in [Ba] or in [B–J1] [B–J2] where interesting links with the IBM are exhibited (they will be detailed in what follows).

More recently, Rösler [Ros1] and Rösler, Voit [Ros–Voi1] have introduced a new type of processes related to Weyl chambers of root systems, the Dunkl processes. These processes are Markov processes as well as martingales, but they no longer have continuous paths.

They may jump from a chamber to another. Nevertheless the projection on the positive Weyl chamber (a proper definition in the sequel) of these processes, which is called the radial part or radial process, has continuous paths. In fact the Dunkl processes are indexed by a parameter k, and when $k = 1$ then their radial part coincide with the IBM. Moreover in dimension 1 (see [G–Y1] for a particular study of this case) the radial Dunkl process of parameter k is the Bessel process of dimension $2k + 1$. This explains why (radial) Dunkl processes are also called (in higher dimension) generalized Bessel processes. Let us notice however, that for a general value of k, there is no more (evident) link with Riemannian geometry. These processes were then studied more deeply by Gallardo and Yor [G–Y1] [G–Y2] [G–Y3], and by Chybiryakov [Chy1] [Chy2], who have obtained many interesting properties, such as the time inversion property, a Wiener chaos decomposition, and a skew product decomposition.

In this paper, we introduce and study the natural counterpart of the Dunkl processes in the negatively curved setting, which we call the Heckman-Opdam processes. These processes are also discontinuous, while their projections in the positive Weyl chamber have continuous paths and coincide with the radial part of the Brownian motion on symmetric spaces (of noncompact type) for particular choices of the parameter. We will show that many known results in probability theory (see [A–B–J] [Ba] [B–J1]) in the symmetric spaces setup, can be generalized to these new processes. In particular the main result of that paper is the following. Consider the bridge of a radial (for simplify) Heckamn-Opdam process of length T around 0 (it starts from 0 and is conditioned to come back at 0 at time T). Then when T tends to infinity this process converges in law (in the path space) to some process that we identify (the F_0-process, which is a relativized process in the sense of Doob). Moreover after suitable normalization this process converges to the IBM. This was proved for the values of k corresponding to the geometric setting (when radial Heckamn-Opdam process coincide with radial part of BM on symmetric spaces) in [B–J2] in dimension 1, and then in all dimensions in [B–J1]. Here we extend (Proposition 3.7.1 and Theorem 3.7.1) this result to all strictly positive values of k (and we prove an analogue result in the non radial case). In particular it is interesting to notice that the limiting process does not depend on k. So the IBM is in some sense attracting, and distinguished among the other (radial) Dunkl processes. Let us also mention that an analogue result has been proved in the context of homogenous trees [B–J2], and in their natural generalization in higher dimension, the affine buildings (in the case of type A), by the author [Sch2].

We detail now the organization of the paper. In the next section we define all the preliminary notions which are required to introduce the Heckman-Opdam and Dunkl processes. These processes are defined in section 3.3, where we present also some elementary properties. In section 3.4 we show that the radial process is solution of a stochastic differential equation. Since the coefficients of the SDE have singularities on the boundary of the Weyl chambers, this can not be deduced from classical theorems, and is proved by using the theory of Dirichlet processes. This result allows to prove then a law of large numbers and a central limit theorem for the radial process. In the following section, we study the jumps of the process and show in particular that when the value of k is large enough, the process does not jump anymore after a finite random time. In this case we prove also a law of large numbers and a central limit theorem for the whole process (with jumps). In section 3.6, we prove that after suitable normalization, the Heckman-Opdam process of parameter k converges to a Dunkl process with parameter k' (for simplify let say that k' is "almost" equal to k). Eventually in the last section we prove the main theorem of the paper which was described above.

3.2 Preliminaries

Let $\mathfrak{a}$ be a Euclidean vector space of dimension n, equipped with an inner product $(\cdot,\cdot)$. Let $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ be the complexification of $\mathfrak{a}$. For $\alpha \in \mathfrak{a}$ let $\alpha^\vee = \frac{2}{|\alpha|^2}\alpha$, and let

$$r_\alpha(x) = x - (\alpha^\vee, x)\alpha,$$

be the corresponding orthogonal reflection. In the sequel we will identify any vector with the linear form it represents. In particular if $\alpha, u \in \mathfrak{a}$, then both notations (α, u) and $\alpha(u)$ are equivalent. Let $\mathcal{R} \subset \mathfrak{a}$ be an *integral* (or crystallographic) *root system*, which by definition (cf [Bou]) satisfies the following hypothesis

1. $\mathcal{R}$ is finite, does not contain 0 and generates $\mathfrak{a}$.
2. $\forall \alpha \in \mathcal{R}$, $r_\alpha(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$.
3. $\forall \alpha \in \mathcal{R}$, $\alpha^\vee(\mathcal{R}) \subset \mathbb{Z}$.

The hyperplane $\{(\alpha, x) = 0\}$ with $\alpha \in \mathcal{R}$ are called the *walls*. The root system is *reducible* if it is the disjoint union of two root systems $\mathcal{R}_1$ and $\mathcal{R}_2$, such that for all $\alpha, \beta \in \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$, $(\alpha, \beta) = 0$. If it is not reducible, we say that it is *irreducible*. In fact if the root system is reducible, then for our purpose the study in $\mathcal{R}$ is equivalent to independent studies in $\mathcal{R}_1$ and $\mathcal{R}_2$. Thus with no loss of generality we will assume here that the root system is irreducible. A remarkable property of the root systems is that for any $\alpha \in \mathcal{R}$, there exists at most one (distinct of α) positive multiple of α in $\mathcal{R}$, which can be either $\alpha/2$ or 2α. Now if for any $\alpha \in \mathcal{R}$, $2\alpha \notin \mathcal{R}$, we say that the root system is *reduced*.

A system of *positive roots* $\mathcal{R}^+$ is defined as follows : first choose arbitrarily a vector $u \in \mathfrak{a}$, such that $(\alpha, u) \neq 0$ for all $\alpha \in \mathcal{R}$. Then $\mathcal{R}^+$ is the subset of roots $\alpha \in \mathcal{R}$ such that $(\alpha, u) > 0$. Naturally, up to isometry, $\mathcal{R}^+$ does not depend on the choice of u. The *simple roots* $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ are defined as a basis of $\mathcal{R}^+$, in the sense that they lie in $\mathcal{R}^+$ and for all $\alpha \in \mathcal{R}^+$, there exist integers $m_1, \dots, m_n$, such that $\alpha = \sum_{i=1}^n m_i \alpha_i$. The *Weyl group* associated to $\mathcal{R}$ is by definition the group generated by the r_α's, with $\alpha \in \mathcal{R}$. If C is a subset of $\mathfrak{a}$, we call *symmetric* of C any image of C under the action of W.

The (irreducible) reduced integral root systems have been classified (up to isometry) into types. There exist 4 infinite families called $(A_n)_n$, $(B_n)_n$, $(C_n)_n$ and $(D_n)_n$, plus a finite number of other types called exceptional (see e.g. [Bou] for more details). Let us describe more precisely for instance the type A_n :

Type A_n : Let $(e_1, \dots, e_{n+1})$ be the canonical basis of $\mathbb{R}^{n+1}$. Let $\mathfrak{a}$ be the hyperplane $\{(x, e_1 + \cdots + e_{n+1}) = 0\}$. Then the set of vectors $e_i - e_j$, for $i \neq j$, is a root system of $\mathfrak{a}$ of type A_n. Moreover a choice of positive roots is the set of vectors $e_i - e_j$, with $i < j$.

Remark 3.2.1 There exists also a notion of root systems (not integral) where the condition 3 in the definition is not imposed. For instance in dimension 2, there exists an infinite family of such root systems, which are the dihedral systems I_n. The system I_n is the set of vectors $e^{i2k\pi/n}u$, for $1 \leq k \leq n$, where u is any vector of the complex plane. For non integral root systems the general theory of Heckman-Opdam does not work anymore. We could however define radial HO-processes as solution of an SDE (see Proposition 3.4.1 below), but there existence would be assured only until the first hitting time of the walls, and above all we could not prove many interesting properties. Therefore in this work, we will restrict us to the case of integral root systems. Let us mention that in the Dunkl theory (cf section 3.3.2) this restriction is not necessary.

A multiplicity function $k : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^+$ is by definition a W-invariant function on $\mathcal{R}$. We recall that by the property 2 of the definition of $\mathcal{R}$, we know that W sends $\mathcal{R}$ into $\mathcal{R}$. Even if it will be of no use here, we just mention that there is at most 3 orbits in $\mathcal{R}$ under the action of W, thus k takes at most 3 distinct values. Moreover if the root system is reduced there is at most 2 orbits, and k takes at most 2 distinct values. We will assume in this paper that $k(\alpha)$ (also denoted by k_α in the sequel) is strictly positive for all $\alpha \in \mathcal{R}^+$. Let us remark that the condition $k_\alpha + k_{2\alpha} > 0$ for all $\alpha \in \mathcal{R}$, is not more general, since if k is null on some orbit (and not on all), we can remove it, and do the study on the remaining root system.

Let

$$\mathfrak{a}_+ = \{x \in \mathfrak{a} \mid \forall \alpha \in \mathcal{R}^+,\ (\alpha, x) > 0\},$$

be the positive Weyl chamber. We denote by $\overline{\mathfrak{a}_+}$ its closure, and by $\partial\mathfrak{a}_+$ its boundary. Let also $\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}}$ be the subset of regular elements in $\mathfrak{a}$, i.e. those elements which belong to no hyperplane $\{x \in \mathfrak{a} \mid (\alpha, x) = 0\}$.
For $\xi \in \mathfrak{a}$, let T_ξ be the Dunkl-Cherednik operator. It is defined, for $f \in C^1(\mathfrak{a})$ and $x \in \mathfrak{a}_{\mathrm{reg}}$, by

$$T_\xi f(x) = \partial_\xi f(x) - (\rho, \xi) f(x) + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} k_\alpha \frac{(\alpha, \xi)}{1 - e^{-(\alpha, x)}} \{f(x) - f(r_\alpha x)\},$$

where

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} k_\alpha \alpha.$$

The Dunkl-Cherednik operators form a commutative family of differential-difference operators (see [C1]). The Laplacian $\mathcal{L}$ is defined by

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^n T_{\xi_i}^2,$$

where $\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$ is any orthonormal basis of $\mathfrak{a}$ ($\mathcal{L}$ is independent of the chosen basis). The Laplacian $\mathcal{L}$ is given explicitly by (see [Sch1]) :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f(x) &= \Delta f(x) + \sum_{\alpha\in\mathcal{R}^+} k_\alpha \coth\frac{(\alpha,x)}{2}\partial_\alpha f(x) + |\rho|^2 f(x) \\ &+ \sum_{\alpha\in\mathcal{R}^+} k_\alpha \frac{|\alpha|^2}{4\sinh^2\frac{(\alpha,x)}{2}}\{f(r_\alpha x) - f(x)\},\end{aligned} \tag{3.1}$$

for $f \in C^2(\mathfrak{a})$ and $x \in \mathfrak{a}_{\text{reg}}$, where Δ denotes the Euclidean Laplacian. Let μ be the measure on $\mathfrak{a}$ given by

$$d\mu(x) = \delta(x)dx,$$

where

$$\delta(x) = \prod_{\alpha\in\mathcal{R}^+} |\sinh\frac{(\alpha,x)}{2}|^{2k_\alpha}.$$

Let $\lambda \in \mathfrak{h}$. We denote by G_λ the unique analytic function on $\mathfrak{a}$, which satisfies the differential and difference equations

$$T_\xi G_\lambda = (\lambda,\xi)G_\lambda, \quad \forall\xi \in \mathfrak{a}$$

and which is normalized by $G_\lambda(0) = 1$ (see [O1]). Let F_λ be the function defined for $x \in \mathfrak{a}$ by

$$F_\lambda(x) = \frac{1}{|W|}\sum_{w\in W} G_\lambda(wx).$$

These functions were introduced in [H–O]. Let $C_0(\mathfrak{a})$ be the space of continuous functions on $\mathfrak{a}$ which vanish at infinity, and let $C_0^2(\mathfrak{a})$ be its subset of twice differentiable functions (with analogue definitions for $\overline{\mathfrak{a}_+}$ in place of $\mathfrak{a}$). We denote by $\mathcal{C}(\mathfrak{a})$ the Schwartz space on $\mathfrak{a}$ adapted to the measure μ, i.e. the space of infinitely differentiable functions f on $\mathfrak{a}$ such that for any polynomial p, and any $N \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{x\in\mathfrak{a}}(1+|x|)^N e^{(\rho,x^+)}|p(\frac{\partial}{\partial x})f(x)| < +\infty,$$

where x^+ is the unique symmetric of x which lies in $\overline{\mathfrak{a}_+}$. In particular $\mathcal{C}(\mathfrak{a})$ is a subspace of $L^2(\mu)$ and is dense in $C_0(\mathfrak{a})$. We denote by $\mathcal{C}(\mathfrak{a})^W$ the subspace of W-invariant functions, which we identify with their restriction to $\overline{\mathfrak{a}_+}$. We have seen in [Sch1] that

$$\mathcal{D} := \frac{1}{2}(\mathcal{L} - |\rho|^2),$$

densely defined on $\mathcal{C}(\mathfrak{a})$, has a closure on $C_0(\mathfrak{a})$, which generates a Feller semigroup $(P_t, t \geq 0)$. We have also obtained the formula for $f \in C_0(\mathfrak{a})$ and $x \in \mathfrak{a}$:

$$P_t f(x) = \int_{\mathfrak{a}} p_t(x,y)f(y)d\mu(y),$$

where $p_t(\cdot,\cdot)$ is the heat kernel. It is defined for $x, y \in \mathfrak{a}$ and $t > 0$, by

$$p_t(x,y) = \int_{i\mathfrak{a}} e^{-\frac{t}{2}(|\lambda|^2+|\rho|^2)} G_\lambda(x) G_\lambda(-y) d\nu(\lambda),$$

where ν is the asymmetric Plancherel measure. It is defined on $i\mathfrak{a}$ by

$$d\nu(\lambda) = \text{const} \cdot \prod_{\alpha\in\mathcal{R}^+} \frac{\Gamma((\lambda,\alpha^\vee)+k_\alpha+\frac{1}{2}k_{\frac{\alpha}{2}})\Gamma(-(\lambda,\alpha^\vee)+k_\alpha+\frac{1}{2}k_{\frac{\alpha}{2}}+1)}{\Gamma((\lambda,\alpha^\vee)+\frac{1}{2}k_{\frac{\alpha}{2}})\Gamma(-(\lambda,\alpha^\vee)+\frac{1}{2}k_{\frac{\alpha}{2}}+1)} d\lambda,$$

where Γ is the Gamma function and by convention $k_{\frac{\alpha}{2}} = 0$, if $\frac{\alpha}{2} \notin \mathcal{R}$. We denote by D the differential part of $\mathcal{D}$, which is equal for $f \in \mathcal{C}(\mathfrak{a})^W$ and $x \in \mathfrak{a}_{\text{reg}}$ to

$$Df(x) = \frac{1}{2}\Delta f(x) + (\nabla \log \delta^{\frac{1}{2}}, \nabla f)(x).$$

It has also a closure on $C_0(\overline{\mathfrak{a}_+})$, which generates a Feller semigroup $(P_t^W, t \geq 0)$. It is associated to a kernel p_t^W, which is defined for $x, y \in \overline{\mathfrak{a}_+}$ and $t > 0$, by

$$p_t^W(x,y) = \int_{i\mathfrak{a}} e^{-\frac{t}{2}(|\lambda|^2+|\rho|^2)} F_\lambda(x) F_\lambda(-y) d\nu'(\lambda),$$

where ν' is the symmetric Plancherel measure defined by

$$d\nu'(\lambda) = \text{const} \cdot \prod_{\alpha\in\mathcal{R}^+} \frac{\Gamma((\lambda,\alpha^\vee)+k_\alpha+\frac{1}{2}k_{\frac{\alpha}{2}})\Gamma(-(\lambda,\alpha^\vee)+k_\alpha+\frac{1}{2}k_{\frac{\alpha}{2}})}{\Gamma((\lambda,\alpha^\vee)+\frac{1}{2}k_{\frac{\alpha}{2}})\Gamma(-(\lambda,\alpha^\vee)+\frac{1}{2}k_{\frac{\alpha}{2}})} d\lambda.$$

3.3 Definition and first properties

3.3.1 The Heckman-Opdam processes

The Heckman-Opdam process (also denoted by HO-process) is defined as the càdlàg Feller process $(X_t, t \geq 0)$ on $\mathfrak{a}$ with semigroup $(P_t, t \geq 0)$. Remember that it is characterized as the unique (in law) solution of the martingale problem associated to $(\mathcal{D}, \mathcal{C}(\mathfrak{a}))$ on $C_0(\mathfrak{a})$, see e.g. Theorem 4.1 and Corollary 4.3 in [E–K]. Observe that, by elementary calculation, the generator of the HO-process is also the closure of $\mathcal{D}$ on $C_c^\infty(\mathfrak{a})$, the space of infinitely differentiable functions with compact support on $\mathfrak{a}$. The multiplicity k is called the parameter of the HO-process. Moreover a.s., for any $t \geq 0$, $X_t \in \mathfrak{a}$, i.e. the exploding time of $(X_t, t \geq 0)$ is almost surely infinite. This results for example from Proposition 2.4 in [E–K]. Similarly, we define the radial process (or radial part of the HO-process), as the Feller process on $\overline{\mathfrak{a}_+}$ with semigroup $(P_t^W, t \geq 0)$. It is also characterized as the unique solution of the martingale problem associated to $(D, \mathcal{C}(\mathfrak{a})^W)$ on $C_0(\overline{\mathfrak{a}_+})$. Consider now the process $(X_t^W, t \geq 0)$ on $\overline{\mathfrak{a}_+}$, defined as the projection on $\overline{\mathfrak{a}_+}$ under the Weyl group W (for any t, X_t^W is the unique symmetric of X_t which lies in $\overline{\mathfrak{a}_+}$).

Proposition 3.3.1 *The process $(X_t^W, t \geq 0)$ is the radial process.*

Proof : Remember that if $f \in \mathcal{C}(\mathfrak{a})^W$, then $\mathcal{D}f = Df \in \mathcal{C}(\mathfrak{a})^W$. Thus for $f \in \mathcal{C}(\mathfrak{a})^W$ and $t \geq 0$,

$$f(X_t^W) - f(X_0^W) - \int_0^t Df(X_s^W)ds = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \mathcal{D}f(X_s)ds.$$

Therefore $(f(X_t^W) - f(X_0^W) - \int_0^t Df(X_s^W)ds, t \geq 0)$ is a local martingale, and we conclude by the uniqueness of the martingale problem associated to D. □

Let us recall eventually that when $2k$ equals the multiplicity associated with a Riemannian symmetric space of noncompact type G/K, then the radial HO-process coincide with the radial part of the Brownian motion on this symmetric space (see [H–O], or [Sch1]). For instance if $G = SL_n$, then $k = \frac{1}{2}$ in the real case, $k = 1$ in the complex case, and $k = 2$ in the quaternionic case.

3.3.2 The Dunkl processes

We recall now the definition of the Dunkl process and of its radial part. Let $\mathcal{R}'$ be a reduced root system (i.e. such that $\forall \alpha \in \mathcal{R}'$, $2\alpha \notin \mathcal{R}'$), but non necessarily integral (i.e. we do not assume condition 3 in the definition), and let k' be a multiplicity function on $\mathcal{R}'$. The Dunkl Laplacian $\mathcal{L}'$ is defined for $f \in C^2(\mathfrak{a})$, and $x \in \mathfrak{a}_{\text{reg}}$ by

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'f(x) &= \frac{1}{2}\Delta f(x) + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}'^+} k'_\alpha \frac{1}{(\alpha, x)} \partial_\alpha f(x) \\ &+ \sum_{\alpha \in \mathcal{R}'^+} k'_\alpha \frac{1}{(\alpha, x)^2} \{f(r_\alpha x) - f(x)\}. \end{aligned}$$

It was proved by Rösler in [Ros1] that $\mathcal{L}'$ defined on $\mathcal{S}(\mathfrak{a})$, the classical Schwartz space on $\mathfrak{a}$, is a closable operator, which generates a Feller semigroup on $C_0(\mathfrak{a})$. Naturally the Dunkl process is the Feller process defined by this semigroup. Now our proof (in [Sch1]) that the operator D defined on $\mathcal{C}(\mathfrak{a})^W$ is closable, also holds in the Dunkl setting. Thus we may define the radial Dunkl process as the Feller process on $\overline{\mathfrak{a}_+}$ with generator the closure of $(L', \mathcal{S}(\mathfrak{a})^W)$, where L' is the differential part of $\mathcal{L}'$, and $\mathcal{S}(\mathfrak{a})^W$ is the subspace of $\mathcal{S}(\mathfrak{a})$ of W-invariant function (identified with their restriction to $\overline{\mathfrak{a}_+}$). In this way we get a new characterization of the radial Dunkl process as the unique solution of the martingale problem associated to $(L, \mathcal{S}(\mathfrak{a})^W)$ on $C_0(\overline{\mathfrak{a}_+})$. Naturally the analogue of Proposition 3.3.1 holds as well in the Dunkl setting. Thus our definition of the radial Dunkl process agrees with the usual one (for instance in [Ros–Voi1]). Eventually the intrinsic Brownian motion is by definition the radial Dunkl process of parameter $k' = 1$.

3.4 The radial HO-process as a Dirichlet process

The goal of this section is to obtain an explicit semimartingale decomposition of the radial HO-process. In the case of root systems of type A, it was obtained by Cépa and Lépingle (see [Cep] and [Cep–Lep] Theorem 2.2). We present here another approach, which is based on the theory of Dirichlet processes. Our reference for this theory will be [Fu–Osh–Ta]. We consider $(D, \mathcal{C}(\mathfrak{a})^W)$ as a symmetric operator on $L^2(\overline{\mathfrak{a}_+}, \mu)$ (simply denoted by L^2 in the sequel). We have seen in [Sch1] that this operator is closable. We denote by $(D, \mathcal{D}_2(D))$ its closure. Its associated semigroup is just the extension of $(P_t^W, t \geq 0)$ on L^2. It is defined for $f, g \in L^2$ and $t \geq 0$ by

$$P_t^W f(x) = \int_{\overline{\mathfrak{a}_+}} p_t^W(x,y) f(y) d\mu(y).$$

We denote by $\mathcal{E}$ the associated Dirichlet form, and by $\mathcal{F}$ its domain ($\mathcal{D}_2(D) \subset \mathcal{F}$). It is determined for $f, g \in \mathcal{D}_2(D)$ by

$$\mathcal{E}(f,g) := -\int_{\overline{\mathfrak{a}_+}} f(x) Dg(x) d\mu(x) = -\int_{\overline{\mathfrak{a}_+}} Df(x) g(x) d\mu(x).$$

The fact that $\mathcal{E}$ is a regular Dirichlet form with special standard core the algebra $\mathcal{C}(\mathfrak{a})^W$, results from the density of this space in $C_0(\overline{\mathfrak{a}_+})$ (see Lemma 5.1 in [Sch1]) and Theorem 3.1.2 in [Fu–Osh–Ta]. We have seen in [Sch1] that when $f \in L^1(\mathfrak{a}, \mu)$, then $Gf : x \mapsto \int_0^\infty P_t^W f(x) dt$ is a.e. finite. In the terminology of [Fu–Osh–Ta], this means that the Dirichlet form $\mathcal{E}$ (or the semigroup P_t^W) is transient. This implies in particular that the process tends to infinity when $t \to \infty$. In the sequel we will prove a law of large numbers which makes this fact precise. It implies also that we may consider $\mathcal{F}$, equipped with its inner product $\mathcal{E}$, as a Hilbert space (see [Fu–Osh–Ta] chapter 2). For $i = 1, \dots, n$, we denote by $\varphi_i : x \mapsto x_i$ the coordinate functions on $\overline{\mathfrak{a}_+}$. For $A > 0$, let $\varphi_i^A \in C^\infty(\overline{\mathfrak{a}_+})$ be a function which coincides with φ_i on $\{|x| \leq A\}$, and which is null on $\{|x| \geq A+1\}$.

Lemma 3.4.1 *For all $A > 0$, $\varphi_i^A \in \mathcal{F}$, and for all $v \in \mathcal{C}(\mathfrak{a})^W$,*

$$\mathcal{E}(\varphi_i^A, v) = -\int_{\overline{\mathfrak{a}_+}} D\varphi_i^A v d\mu.$$

Proof : Let $(u_n)_n \in \mathcal{C}(\mathfrak{a})^W$ which converges uniformly to φ_i^A as in Lemma 5.1 in [Sch1]. In particular we may assume that $|u_n - \varphi_i^A|_\infty \leq \frac{1}{n}$ for all n. Moreover the sequence $(|\nabla u_n|_\infty)_n$ is bounded, and there exists a constant $C > 0$ (independent of n), such that $|\Delta u_n(x)| \leq C$ or $\leq Cn$ if respectively $d(x, \partial\mathfrak{a}_+) \geq \frac{1}{n}$ or $d(x, \partial\mathfrak{a}_+) \leq \frac{1}{n}$. It implies in particular that

$$\begin{aligned} |Du_n(x)| &\leq \text{const} \left(\frac{1}{d(x, \partial\mathfrak{a}_+)} + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} \coth \frac{(\alpha, x)}{2} \right) \\ &\leq \text{const} \cdot \frac{1}{d(x, \partial\mathfrak{a}_+)}, \end{aligned}$$

for all n and all $x \in \mathfrak{a}_+$, such that $|x| \leq A+1$. We will deduce from these estimates that $(u_n)_n$ is an $\mathcal{E}$-Cauchy sequence, which will imply that $\varphi_i^A \in \mathcal{F}$. Let $n < m$ be two integers. Since $u_n(x) = 0$ when $|x| \geq A+1$, we have

$$\mathcal{E}(u_n - u_m, u_n - u_m) = -\int_{|x|\leq A+1} (u_n - u_m) D(u_n - u_m) d\mu.$$

Moreover since k is strictly positive, the function $x \mapsto \frac{1}{d(x,\partial\mathfrak{a}_+)}$ is μ-integrable. Then we get that,

$$\mathcal{E}(u_n - u_m, u_n - u_m) \leq \text{const} \cdot \frac{1}{n}.$$

Thus $(u_n)_n$ is an $\mathcal{E}$-Cauchy sequence, which converges to φ_i^A. The last statement of the lemma follows from the dominated convergence theorem. □

The lemma implies (in the terminology of [Fu–Osh–Ta]), that the functions φ_i are in $\mathcal{F}_{b,\text{loc}}$. Thanks to Theorem 5.5.1 of [Fu–Osh–Ta], there exist martingale additive functionals locally of finite energy M^i, and additive functionals locally of zero energy N^i such that, for every i,

$$\varphi_i(X^W) = M^i + N^i. \tag{3.2}$$

For $A > 0$, we denote by ν_i^A the measure defined by $d\nu_i^A = -D\varphi_i^A d\mu$. Observe that $1_{(|x|\leq A)} d\nu_i^A(x) = \sum_\alpha k_\alpha \coth(\frac{\alpha}{2}, x)\varphi_i(\alpha) 1_{(|x|\leq A)} d\mu(x)$. We denote by ν_i the Radon measure defined by $d\nu_i(x) = \sum_\alpha k_\alpha \coth(\frac{\alpha}{2}, x)\varphi_i(\alpha) d\mu(x)$. Thanks to Theorem 5.5.4 of [Fu–Osh–Ta], and the preceding lemma, we see that N^i is an additive functional of bounded variation, and that it is the unique continuous additive functional associated to the measure ν^i (ν^i is called the Revuz measure of N^i). Moreover from Theorem 5.1.3 (*iii*) in [Fu–Osh–Ta], we get for all i and all $t \geq 0$,

$$N_t^i = \sum_{\alpha\in\mathcal{R}^+} k_\alpha \phi_i(\alpha) \int_0^t \coth\frac{(\alpha, X_s^W)}{2} ds.$$

In the same way, it is immediate from Theorem 5.5.2 and the identity 3.2.14 in [Fu–Osh–Ta], that the Revuz measure of $< M^i >$ is μ for each i. Therefore $M := \sum_i M^i e_i$ is necessarily a Brownian motion on $\mathfrak{a}$ (we have denoted by e_i the i^{th} vector of the canonical basis). Now, since coth is positive on $(0, +\infty)$, and X^W does not explode, we see with (3.2) that necessarily, for all $t > 0$, $\sum_{i=1}^n N_t^i e_i \in \overline{\mathfrak{a}_+}$ (in particular it does not explode). Thus for any α, $(\int_0^t \coth\frac{(\alpha,X_s^W)}{2} ds, t \geq 0)$ is in fact a positive additive functional and its expectation is therefore finite for each time $t \geq 0$ and for q.e. starting point x (q.e. stands for quasi everywhere, as explained in [Fu–Osh–Ta]). But it results from [Cep–Lep] Theorem 2.2 that it is in fact true for all $x \in \overline{\mathfrak{a}_+}$. Indeed there it is proved that

$$\mathbb{E}_x[\int_0^t |\nabla \log \delta^{\frac{1}{2}}(X_s^W)| ds] < +\infty.$$

But $\nabla \log \delta^{\frac{1}{2}}$ is equal to $k_\alpha \alpha \coth \frac{\alpha}{2} + z$, where z lies in the cone, let say C^*, generated by the convex hull of $\mathcal{R}^+$. Thus (since $-\alpha \notin C^*$) there exists a constant $c > 0$ such that,

$$c \coth \frac{(\alpha, x)}{2} \leq d(0, k_\alpha \alpha \coth \frac{(\alpha, x)}{2} + C^*) \leq |\nabla \log \delta^{\frac{1}{2}}(x)|,$$

for all $x \in \overline{\mathfrak{a}_+}$. Finally we have proved the following result

Proposition 3.4.1 *The radial Heckman-Opdam process $(X_t^W, t \geq 0)$ starting at $x \in \overline{\mathfrak{a}_+}$, is a continuous semimartingale, and is the unique solution of the following SDE*

$$X_t^W = x + \beta_t + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} k_\alpha \frac{\alpha}{2} \int_0^t \coth \frac{(\alpha, X_s^W)}{2} ds, \ t \geq 0, \tag{3.3}$$

where $(\beta_t, t \geq 0)$ is a Brownian motion on $\mathfrak{a}$. Moreover for any $t \geq 0$, any $x \in \overline{\mathfrak{a}_+}$ and any $\alpha \in \mathcal{R}^+$,

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^t \coth \frac{(\alpha, X_s^W)}{2} ds \right] < +\infty.$$

The uniqueness in law of the SDE (3.3) is just a consequence of the uniqueness of solutions to the martingale problem associated to $(D, \mathcal{C}(\mathfrak{a})^W)$. In fact there is also strong uniqueness. This results simply from the fact that coth is decreasing. Indeed if (X, B) and (X', B) are two solutions of (3.3), then for all $t \geq 0$,

$$\frac{d}{dt}(|X_t - X_t'|^2) = 2(X_t - X_t', \nabla \log \delta^{\frac{1}{2}}(X_t) - \nabla \log \delta^{\frac{1}{2}}(X_t')) \leq 0,$$

which proves that X and X' are indistinguishable. With Theorem (1.7) p. 368 in [R–Y], this implies also that each solution is strong.

Remark 3.4.1

1. The finiteness of the expectation in the proposition will be used in the next section for the study of the jumps.
2. We could ask whether the processes considered by Cépa and Lepingle in [Cep–Lep] coincide with ours. In fact they prove existence of a solution for the same SDE but with an additional local time term. The question is therefore to know if this local time is equal to 0. Cépa and Lépingle have proved this for root systems of type A. But we can prove it now for the other root systems. Indeed by the Itô formula, their process is a solution of the martingale problem associated to D, since for any W-invariant function f, $(\nabla f(x), n) = 0$, for all $x \in \partial\mathfrak{a}_+$ and all normal vector n. Thus they coincide with the radial HO-process whose local time on $\partial\mathfrak{a}_+$ is 0.
3. In fact Proposition 3.4.1 is also valid (with the same proof) in the Dunkl setting (with the function $x \mapsto x^{-1}$ in place of the function coth), where it was proved in the same time, but with a completely different method, by Chybiryakov (see [Chy2]).

A first consequence of Proposition 3.4.1 is an absolute continuity relation between the laws of the radial HO-process and the corresponding radial Dunkl process. More precisely, let $\mathbb{P}^W$ be the law of $(X_t^W, t \geq 0)$ with parameter k on $C(\mathbb{R}^+, \overline{\mathfrak{a}_+})$. Let $\mathcal{R}' := \{\frac{\sqrt{2}\alpha}{|\alpha|} \mid \alpha \in \mathcal{R}\}$, and if $\beta = \frac{\sqrt{2}\alpha}{|\alpha|} \in \mathcal{R}'$, let $k'_\beta := k_\alpha + k_{2\alpha}$. Let $\mathbb{Q}^W$ be the law of the radial Dunkl process $(Z_t^W, t \geq 0)$ associated to the root system $\mathcal{R}'$ and with parameter k'. Let $(L_t, t \geq 0)$ be the process defined by

$$L_t := \int_0^t \nabla \log \frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{\pi}(Z_s^W) d\beta_s, \ t \geq 0,$$

where $(\beta_t, t \geq 0)$ is a Brownian motion under $\mathbb{Q}^W$, and

$$\pi(x) = \prod_{\beta \in \mathcal{R}'} (\beta, x)^{k'_\beta}.$$

As the function $x \mapsto \frac{1}{x} - \coth(x)$ is bounded on $\mathbb{R}$ we get that, for all $t \geq 0$, $\mathbb{Q}^W[\exp(\frac{1}{2} < L >_t)] < \infty$ (where $\mathbb{Q}^W[\dots]$ stands for the expectation under the law $\mathbb{Q}^W$). Thus $M := \exp(L - \frac{1}{2} < L >)$, the stochastic exponential of L, is a $\mathbb{Q}^W$-martingale. Moreover as mentioned in Remark 3.4.1 we have also an explicit decomposition of the radial Dunkl process as "Brownian motion plus a term with bounded variation". Therefore, by using the Girsanov theorem [R–Y], we get that for any $t \geq 0$, if $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ is the canonical filtration on $C(\mathbb{R}^+, \overline{\mathfrak{a}_+})$, then

$$\mathbb{P}^W_{|\mathcal{F}_t} = M_t \cdot \mathbb{Q}^W_{|\mathcal{F}_t}. \tag{3.4}$$

As a consequence we obtain for instance that when $k_\alpha + k_{2\alpha} \geq 1/2$, then the HO-process starting at any $x \in \mathfrak{a}_+$ a.s. does not touch the walls (i.e. the subspaces of the type $\{\alpha = 0\}$). This follows from the similar result for the Dunkl processes proved in [Chy1]. Now if it starts at some $x \in \partial\mathfrak{a}_+$ then a.s., by the Markov property, it will never touch the walls in strictly positive times (observe that $\mu(\partial\mathfrak{a}_+) = 0$, thus at any $t > 0$, a.s. $X_t \in \mathfrak{a}_+$).

We will now prove a law of large numbers and a central limit theorem for the radial Heckman-Opdam processes. These results are well known in the setting of symmetric spaces of noncompact type (see for instance Babillot [Ba]).

Proposition 3.4.2 *The radial process satisfies the law of large numbers*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{X_t^W}{t} \to \rho \ a.s.,$$

and there is the convergence in $C(\mathbb{R}^+, \overline{\mathfrak{a}_+})$

$$(\frac{X_{tT}^W - \rho t T}{\sqrt{T}}, t \geq 0) \xrightarrow[T \to \infty]{} (\beta_t, t \geq 0).$$

Proof : The first step is to prove that $(\alpha, X_t^W) \to +\infty$, when $t \to +\infty$, for all $\alpha \in \mathcal{R}^+$. In fact by linearity it is enough to prove this only for the simple roots. We denote by $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ the set of simple roots. From Proposition 3.4.1 we see that the radial process (starting at x) satisfies for any $t \geq 0$,

$$X_t^W = x + \beta_t + \rho t + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} k_\alpha \alpha \int_0^t [\coth \frac{(\alpha, X_s^W)}{2} - 1] ds. \tag{3.5}$$

Let $u \in \overline{\mathfrak{a}_+}$. From (3.5) we get that for all $t \geq 0$, $(u, X_t^W) - (u, x) - (u, \beta_t) \geq (u, \rho)t$, because $\coth(x) \geq 1$ for $x \geq 0$. Thus $(u, X_t^W) \to +\infty$, when $t \to +\infty$. In particular $(\rho, X_t^W) \to +\infty$. It implies that $\max_{i=1,\dots,n}(\alpha_i, X_t^W) \to +\infty$. For $t > 0$, let $i_1, \dots, i_n$ be such that $(\alpha_{i_1}, X_t^W) \geq \dots \geq (\alpha_{i_n}, X_t^W)$ (we forget the dependance in t in the notation). We prove now that $(\alpha_{i_2}, X_t^W) \to +\infty$. Let $\epsilon > 0$ and let T_0 be such that $\coth(\alpha_{i_1}, X_t^W) - 1 \leq \epsilon$ and $|x + \beta_t| \leq \epsilon t$ for $t \geq T_0$. Let $\mathcal{R}_2$ be the root system generated by $\{\alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_n}\}$ and let $\rho_2 = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_2^+} k_\alpha \alpha$. Observe in particular that if $\alpha \in \mathcal{R}_2^+$, then $(\alpha, \rho_2) \geq 0$, whereas if $\alpha \neq \alpha_{i_1}$ and $\alpha \notin \mathcal{R}_2^+$, then $\alpha - \alpha_{i_1} \in \mathcal{R}^+$ and thus $\coth \frac{(\alpha, X_t^W)}{2} \leq 1 + \epsilon$. Now from (3.5) we get for $t \geq T_0$,

$$(\rho_2, X_t^W) \geq ((\rho, \rho_2) - \epsilon)t + f(t),$$

where $f(t) = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} k_\alpha (\alpha, \rho_2) \int_0^t [\coth \frac{(\alpha, X_s^W)}{2} - 1] ds$. Hence by our choice of ρ_2, we have for $t \geq T_0$, $f'(t) \geq -C\epsilon$ for some constant $C > 0$. Then we get another constant $C' > 0$ such that $f(t) \geq -C' - C\epsilon t$ for $t \geq T_0$. Thus we conclude that $(\rho_2, X_t^W) \to +\infty$ and $(\alpha_{i_2}, X_t^W) \to +\infty$. In the same way we deduce that $(\alpha_i, X_t^W) \to +\infty$ for all $1 \leq i \leq n$. Eventually we get immediately the law of large numbers from (3.5).
For the second claim of the proposition, we will show that a.s.

$$\left| \frac{1}{\sqrt{T}} (X_{tT}^W - x - \beta_{tT} - tT\rho) \right| \xrightarrow[T \to \infty]{} 0,$$

uniformly in $t \in \mathbb{R}^+$. Let $\epsilon > 0$. By the first claim, we know that there is some N such that for every $s \geq N$, $|\coth \frac{(\alpha, X_s^W)}{2} - 1| \leq e^{-cs}$ for some strictly positive constant c. Then we have

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^{tT} [\coth \frac{(\alpha, X_s^W)}{2} - 1] ds &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^{N \wedge tT} [\coth \frac{(\alpha, X_s^W)}{2} - 1] ds \\ &+ \frac{1}{\sqrt{T}} 1_{(tT \geq N)} \int_N^{tT} [\coth \frac{(\alpha, X_s^W)}{2} - 1] ds. \end{aligned}$$

But the both integrals can be made smaller than ϵ by choosing T sufficiently large. The second claim follows using the scaling property of the Brownian motion. □

3.5 Jumps of the process

We will now study the behavior of the jumps of the Heckman-Opdam process. We use essentially the same tool as in [G–Y3] for the Dunkl processes, i.e. we use the predictable compensators of some discontinuous functionals. However in our setting we obtain a more precise result when $k_\alpha + k_{2\alpha} \geq \frac{1}{2}$ for all α. In fact in this case, there is almost surely a finite random time, after which the process does not jump anymore. This allows to prove for such multiplicity k a law of large numbers and a central limit theorem for the HO-process. Let us first recall the definition of the Lévy kernel $N(x, dy)$ of a homogeneous Markov process with a transition semigroup $(P_t)_{t\geq 0}$ and generator $\mathcal{D}$ (see Meyer [Mey]). It is determined, for any $x \in \mathbb{R}^d$ by :

$$\mathcal{D}f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{P_t f(x)}{t} = \int_{\mathfrak{a}} N(x, dy) f(y),$$

for f a function in the domain of the infinitesimal generator which vanishes in a neighborhood of x. The following lemma describes the Lévy kernel of the HO-process. It is an immediate consequence of the explicit expression (3.1) of $\mathcal{L}$. First we introduce some notation. If I is a subset of $\mathcal{R}^+$, we denote by

$$\mathfrak{a}^I = \{x \in \mathfrak{a} \mid \forall \alpha \in I,\ (\alpha, x) = 0\},$$

the face associated to I. We also denote by $\mathcal{R}_I$ the set of positive roots which are orthogonal to $\mathfrak{a}^I$.

Lemma 3.5.1 *The Lévy kernel of the HO-process has the following form*

$$N(x, dy) = \begin{cases} \sum_{\alpha\in\mathcal{R}^+} k_\alpha \frac{|\alpha|^2}{8} \frac{\epsilon_{r_\alpha x}(dy)}{\sinh^2 \frac{(\alpha,x)}{2}} & \text{if} \quad x \in \mathfrak{a}_{reg} \\ \sum_{\alpha\in\mathcal{R}^+\setminus\mathcal{R}_I} k_\alpha \frac{|\alpha|^2}{8} \frac{\epsilon_{r_\alpha x}(dy)}{\sinh^2 \frac{(\alpha,x)}{2}} & \text{if} \quad x \in \mathfrak{a}^I, \end{cases}$$

where I is a subset of $\mathcal{R}^+$, and for $x \in \mathfrak{a}$, ϵ_x is the Dirac measure in x.

Remark 3.5.1 The lemma implies that when there is a jump at a random time s, i.e. $X_s \neq X_{s-}$, then almost surely there exists $\alpha \in \mathcal{R}^+$ such that $X_s = r_\alpha X_{s-}$ (see [G–Y3]). In this case we have

$$\Delta X_s := X_s - X_{s-} = -(\alpha^\vee, X_{s-})\alpha.$$

Using the finiteness of the expectation of the time integrals appearing in (3.3), we can show that the sum over any time interval of the amplitudes of the jumps is finite.

Proposition 3.5.1 *Let $(X_t, t \geq 0)$ be a Heckman-Opdam process. For every $t > 0$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{s\leq t} |\Delta X_s|\right] < +\infty.$$

Proof : From the above remark we get

$$\sum_{s\leq t} |\Delta X_s| = \sum_{\alpha\in\mathcal{R}^+} \sum_{s\leq t} f_\alpha(X_{s-}, X_s),$$

where

$$f_\alpha(x,y) = \frac{2}{|\alpha|}|(\alpha,x)|1_{(y=r_\alpha x\neq x)}.$$

Now, the positive discontinuous functional $\sum_{s\leq t} f_\alpha(X_{s-},X_s)$ is compensated by the process $\int_0^t ds\int_{\mathfrak{a}} N(X_{s-},dy)f_\alpha(X_{s-},y)$. As a consequence, the proposition will be proved if we know that the expectation of the compensator is finite at all time $t\geq 0$. Thus we have to show that for every $\alpha\in\mathcal{R}^+$,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|\frac{(\alpha,X_s)}{\sinh^2\frac{(\alpha,X_s)}{2}}\right| ds\right] < +\infty.$$

But for every $x>0$, $\frac{x}{\sinh^2 x}\leq 2\coth x$. Therefore the above condition follows from Proposition 3.4.1. □

For $\alpha\in\mathcal{R}^+$, we denote by $(M_t^\alpha, t\geq 0)$ the process defined for $t\geq 0$ by :

$$M_t^\alpha = \sum_{s\leq t} -(\alpha^\vee, X_{s-})1_{(r_\alpha X_{s-}=X_s)} + \frac{k_\alpha}{4}\int_0^t \frac{(\alpha,X_s)}{\sinh^2\frac{(\alpha,X_s)}{2}}ds. \tag{3.6}$$

By the martingale characterization of $(X_t,t\geq 0)$, we know that $(f(X_t),t\geq 0)$ is a local semimartingale for all $f\in C_c^\infty(\mathfrak{a})$. Thus $(X_t,t\geq 0)$ itself is a local semimartingale. In the next proposition we give its explicit decomposition. It is the analogue of a result of Gallardo and Yor on the decomposition of the Dunkl processes. The proof is very similar (and uses Proposition 3.5.1), so we refer to [G–Y3] for more details.

Proposition 3.5.2 *We have the following semimartingale decomposition :*

$$X_t = X_0 + \beta_t + \sum_{\alpha\in\mathcal{R}^+} M_t^\alpha \alpha + A_t,$$

for $t\geq 0$, where

$$A_t = \sum_{\alpha\in\mathcal{R}^+}\frac{k_\alpha}{2}\alpha\int_0^t\left[\coth\frac{(\alpha,X_s)}{2} - \frac{(\alpha,X_s)}{2\sinh^2\frac{(\alpha,X_s)}{2}}\right]ds,$$

and the M^α's are purely discontinuous martingales given by (3.6) which satisfy

$$[M^\alpha, M^\beta]_t = 0,\ \textit{if } \alpha\neq\beta,$$

and

$$< M^\alpha >_t = \frac{k_\alpha}{4|\alpha|^2}\int_0^t \frac{(\alpha,X_s)^2}{\sinh^2\frac{(\alpha,X_s)}{2}}ds.$$

Another interesting property of the jumps is that, when $k_\alpha + k_{2\alpha}\geq 1/2$ for all α, and when the starting point lies in $\mathfrak{a}_{\text{reg}}$, in which case the HO-process does not touch the walls, the number of jumps N_t up to a fixed time t is a.s. finite. Indeed otherwise the paths of the trajectories would not be càdlàg. Therefore the sequence of stopping times $T_n = \inf\{t > 0, N_t \geq n\}$ converges a.s. to $+\infty$ when n tends to infinity. Thus $(N_t, t \geq 0)$ is a locally integrable (because locally finite) increasing process. We will deduce from this observation and a general result of [Jac] a more precise result. For $t \geq 0$, we denote by w_t the element of W such that $X_t = w_t X_t^W$.

Proposition 3.5.3 *Assume that $k_\alpha + k_{2\alpha} \geq 1/2$ for all α.*

1. *If the starting point lies in $\mathfrak{a}_{reg}$, then a.s.*

$$\sup_{t\geq 0} N_t < +\infty.$$

2. *For any starting point in $\mathfrak{a}$, w_t converges a.s. to $w_\infty \in W$ when $t \to \infty$. If the process starts from zero, then the law of w_∞ is the uniform probability on W.*
3. *When $T \to \infty$, the sequences $(\frac{1}{T} X_{tT}, t \geq 0)$ and $(\frac{1}{\sqrt{T}}(X_{tT} - w_{tT}\rho tT), t \geq 0)$ converge in law in $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathfrak{a})$ respectively to $(w_\infty \rho t, t \geq 0)$, and to a Brownian motion $(\beta_t, t \geq 0)$.*

Proof : Let us begin with the first claim. As in the preceding proposition we use the following result of Meyer about the Lévy kernel : the positive discontinuous functional $(N_t, t \geq 0)$ can be compensated by the predictable process $(\sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} k_\alpha \frac{|\alpha|^2}{8} \int_0^t \frac{1}{\sinh^2 \frac{(\alpha, X_s)}{2}} ds, t \geq 0)$. Now from the law of large numbers (Proposition 3.4.2) we deduce that this compensator converges a.s. to a finite value when $t \to \infty$. Thus the corollary (5.20) p. 168 of [Jac] gives the result. Then the second point is simply a consequence of the first point and of the Markov property. The assertion that the limit law is uniform when the process starts from zero results from the fact that for any $w \in W$, $\mathcal{D}$ remains unchanged if we replace $\mathcal{R}^+$ by $w\mathcal{R}^+$. The first convergence result of the last point is straightforward with the second point and Proposition 3.4.2. For the second convergence result, we can use Proposition 3.5.2. Indeed it says that for all $t > 0$ and $T > 0$,

$$\begin{aligned}\frac{X_{tT} - w_{tT}\rho tT}{\sqrt{T}} &= \frac{\beta_{tT}}{\sqrt{T}} + \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{s \leq tT} \Delta X_s \\ &+ \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} k_\alpha \frac{\alpha}{2\sqrt{T}} \int_0^{tT} \left[\coth \frac{(\alpha, X_s)}{2} - \epsilon_{tT}^\alpha\right] ds,\end{aligned}$$

where the $\epsilon_{tT}^\alpha \in \{\pm 1\}$ are defined by $w_{tT}\rho = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} k_\alpha \epsilon_{tT}^\alpha \alpha$, or equivalently by $\epsilon_{tT}^\alpha \alpha \in w_{tT}\mathcal{R}^+$. But by the second point of the proposition, we know that a.s. there exists a random time after which the process stays in the same chamber, which is $w_\infty \mathfrak{a}_+$. Moreover for all $s > 0$ and all $\alpha \in \mathcal{R}^+$, $\epsilon_s^\alpha (\alpha, X_s) \geq 0$. Thus by Proposition 3.4.2 $\coth \frac{(\alpha, X_s)}{2} - \epsilon_{tT}^\alpha$ tends to 0 exponentially fast when $s \to \infty$ (and $s \leq tT$). Then a.s. $\sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} k_\alpha \frac{\alpha}{2\sqrt{T}} \int_0^{tT} \left[\coth \frac{(\alpha, X_s)}{2} - \epsilon_{tT}^\alpha\right] ds$ tends to 0 when $T \to \infty$, uniformly in $t \in \mathbb{R}^+$. In the same way, by Proposition 3.5.1, a.s. for any $A > 0$, $\sum_{s \leq A} |\Delta X_s| < +\infty$. By the second point we know that a.s. after some time there is no more jumps, thus a.s. $\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{s \leq tT} |\Delta X_s|$ tends to 0 when $T \to \infty$, uniformly in $t \in \mathbb{R}^+$. This proves the desired result by the scaling property of the Brownian motion. $\square$

3.6 Convergence to the Dunkl processes

In this section we will show that when it is well normalized, the HO-process of parameter $k > 0$ converges to a certain Dunkl process $(Z_t, t \geq 0)$. The proof uses a general criteria for a sequence of Feller processes with jumps, which can be found in [E–K] for instance. Roughly speaking it states that it suffices to prove the convergence of the generator of these processes on a core of the limit. Let us notice that the convergence of the normalized radial HO-process to the corresponding radial Dunkl process is more elementary. It could be proved essentially by using that the laws of the radial HO-process and the radial Dunkl process are absolutely continuous, and that the normalized Radon-Nikodym derivative tends to 1. Let us also observe that the convergence of the normalized radial process has a natural geometric interpretation in the setting of symmetric spaces of noncompact type. Indeed in this setting the radial Dunkl process is just the radial part of the Brownian motion on the tangent space (or the Cartan motion group, see the more precise description by De Jeu [Je2], and in [A–B–J] in the complex case). From the analytic point of view, it also illustrates the more conceptual principle, that the Dunkl (also called rational) theory is the limit of the Heckman-Opdam (or trigonometric) theory, when "the curvature goes to zero".
We denote by $(X_t^T, t \geq 0)$ the normalized HO-process, which is defined for $t \geq 0$ and $T > 0$ by :

$$X_t^T = \sqrt{T} X_{\frac{t}{T}}.$$

We recall that $\mathcal{R}' = \{\frac{\sqrt{2}\alpha}{|\alpha|},\ \alpha \in \mathcal{R}\}$, and that for $\beta = \frac{\sqrt{2}\alpha}{|\alpha|} \in \mathcal{R}'$, $k'_\beta = k_\alpha + k_{2\alpha}$.

Theorem 3.6.1 *When $T \to \infty$, the normalized HO-process $(X_t^T, t \geq 0)$ with parameter k starting at 0 converges in distribution in $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathfrak{a})$ to the Dunkl process $(Z_t, t \geq 0)$ associated with $\mathcal{R}'$ and with parameter k' starting at 0.*

Proof : First it is well known that the process $(X_t^T, t \geq 0)$ is also a Feller process with generator $\mathcal{L}^T$ defined for $f \in C^2(\mathfrak{a})$ and $x \in \mathfrak{a}_{\text{reg}}$, by $\mathcal{L}^T f(x) = \frac{1}{T}(\mathcal{L}g)(\frac{x}{\sqrt{T}})$, where $g(x) = f(\sqrt{T}x)$. Thus a core of $\mathcal{L}^T$ is, like for $\mathcal{L}$ and $\mathcal{L}'$, the space $C_c^\infty(\mathfrak{a})$. Moreover it is straightforward that for any $f \in C_c^\infty(\mathfrak{a})$, $\mathcal{L}^T f$ converges uniformly on $\mathfrak{a}$ to $\mathcal{L}' f$. Therefore we can apply Theorem 6.1 p. 28 and Theorem 2.5 p. 167 in [E–K], which give the desired result. □

3.7 The F_0-process and its asymptotic behavior

We introduce here and study a generalization of the radial part of the Infinite Brownian Loop (abbreviated as I.B.L.) introduced in [A–B–J]. Let $\tilde{F}_0(x,t) := F_0(x) e^{\frac{|\rho|^2}{2} t}$, for $(x,t) \in \mathfrak{a} \times [0, +\infty)$. Then $\tilde{F}_0$ is harmonic for the operator $\partial_t + \mathcal{D}$ which is the generator of $(X_t, t)_{t \geq 0}$. We define now the processes $(Y_t, t)_{t \geq 0}$ as the relativized $\tilde{F}_0$-processes in the sense of Doob of $(X_t, t)_{t \geq 0}$. By abuse of language we will call $(Y_t, t \geq 0)$ the F_0-process. We denote by $(Y_t^W, t \geq 0)$ its radial part, that we will call the radial F_0-process. For particular values of k it coincides with the radial part (in the Lie group terminology) of the I.B.L. on a symmetric space.

The goal of this section is to generalize some results of [A–B–J] and [B–J1], for any $k > 0$. Essentially we first prove the convergence of the HO-bridge of length T around 0, i.e. the HO-process conditioned to be equal to 0 at time T, to the F_0-process starting at 0, when T tends to infinity. Then we prove the convergence of the normalized F_0-process to a process whose radial part is the intrinsic Brownian motion, but which propagates in a random chamber (independently and uniformly chosen). We begin by the following lemma :

Lemma 3.7.1 *Let $x, a \in \overline{\mathfrak{a}_+}$. When $T \to \infty$,*

$$\frac{p^W_{T-t}(x,a)}{p^W_T(a,a)} \to \frac{F_0(x)}{F_0(a)} e^{\frac{t}{2}|\rho|^2}.$$

Proof : We need the integral formula of the heat kernel :

$$p^W_t(x,y) = \int_{i\mathfrak{a}} e^{-\frac{t}{2}(|\lambda|^2+|\rho|^2)} F_\lambda(x) F_{-\lambda}(y) d\nu'(\lambda), \; x, y \in \mathfrak{a}_+.$$

We make the change of variables $u := \lambda(T-t)$ for p^W_{T-t}, and $v := \lambda T$ for p^W_T. Then we let T tend to $+\infty$ and the result follows. □

Proposition 3.7.1 *Let $(X^{0,T}_t, t \geq 0)$ be the HO-bridge around 0 of length T. Then when $T \to +\infty$, it converges in distribution in $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathfrak{a})$ to the F_0-process starting at 0.*

Proof : We know that for any $t \geq 0$, and any bounded $\mathcal{F}_t$-measurable function F,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[F(X^{0,T}_s, 0 \leq s \leq t)\right] &= \mathbb{E}\left[F(X_s, 0 \leq s \leq t)\frac{p_{T-t}(X_t,0)}{p_T(0,0)}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[F(X_s, 0 \leq s \leq t)\frac{p^W_{T-t}(X^W_t,0)}{p^W_T(0,0)}\right]
\end{aligned}$$

The second equality results from the fact that $p_t(x,0) = \frac{1}{|W|}p^W_t(x,0)$, for all $x \in \mathfrak{a}$ and all $t \geq 0$ (see [Sch1]). Moreover since F_λ is bounded (cf [O1]) and the measure ν' is positive, we see from the integral formula of p^W_t, that there exists a constant C such that, $p^W_t(x,y) \leq C p^W_t(0,0)$, for all $t > 0$ and all $x, y \in \overline{\mathfrak{a}_+}$. It follows that $\frac{p^W_{T-t}(x,0)}{p^W_T(0,0)}$ is a bounded function of $(x,T) \in \overline{\mathfrak{a}_+} \times [1, \infty)$. Then we get the result from the preceding lemma and the dominated convergence theorem. □

Remark 3.7.1 In the radial setting the preceding result holds for any starting point. More precisely, the radial HO-bridge of length T around $a \in \overline{\mathfrak{a}_+}$ is defined as the radial HO-process starting from a and conditioned to be equal to a at time T. Then this process converges in law, when T tends to infinity, to the radial F_0-process starting from a. The proof is the same than in the preceding proposition (with X_s and p_t replaced respectively by X^W_s and p^W_t).

The next result is an important technical lemma :

Lemma 3.7.2 *There exist two Bessel processes* $(R_t, t \geq 0)$ *and* $(R'_t, t \geq 0)$ *(not necessarily with the same dimension), such that a.s.* $|R_0| = |R'_0| = |Y_0|$ *and for any* $t \geq 0$*,*

$$R_t^2 \leq |Y_t|^2 \leq R_t'^2.$$

Proof : First the F_0 process and its radial part have the same norm, hence it suffices to prove the result for $(Y_t^W, t \geq 0)$. Next we can follow exactly the same proof as in [A–B–J]. We recall it for the convenience of the reader. We know that $(Y_t^W, t \geq 0)$ is solution of the SDE

$$Y_t^W = Y_0^W + \beta_t + \int_0^t \nabla \log(\delta^{\frac{1}{2}} F_0)(Y_s^W) ds,$$

where $(\beta_t, t \geq 0)$ is a Brownian motion. By Itô formula we get

$$|Y_t^W|^2 = |Y_0^W|^2 + 2\int_0^t (Y_s^W, d\beta_s) + tn + 2\int_0^t E[\log(\delta^{\frac{1}{2}} F_0)](Y_s^W) ds,$$

where $E = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ is the Euler operator on $\mathfrak{a}$. And it was shown in [Sch1] that $E[\log(\delta^{\frac{1}{2}} F_0)]$ is positive and bounded on $\mathfrak{a}$. Thus we can conclude by using comparison theorems. □

Corollary 3.7.1 *Let* $(Y_t, t \geq 0)$ *be the* F_0*-process. Then almost surely,*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{|Y_t|}{t} = 0.$$

More precisely (law of the iterated logarithm), a.s.

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{|Y_t|}{\sqrt{2t \log \log t}} = 1.$$

Proof : This follows from the preceding lemma and known properties of the Bessel processes. □

In the complex case, i.e. when $2k$ is equal to the multiplicity function on some complex Riemannian symmetric space of noncompact type (or equivalently when $\mathcal{R}$ is reduced and $k = 1$), then it was proved in [A–B–J] that the radial F_0-process coincides with the intrinsic Brownian motion. It was also proved in [A–B–J] that in the real case, i.e. for other choices of k, a normalization of the radial F_0-process converges to the intrinsic Brownian motion. The next theorem gives a generalization of this result for any multiplicity $k > 0$ and for the (non radial) F_0-process also. We denote by $(Y_t^T, t \geq 0)$ the process defined for $t \geq 0$ and $T > 0$, by

$$Y_t^T := \frac{1}{\sqrt{T}} Y_{tT},$$

and we denote by $(Y_t^{W,T}, t \geq 0)$ its radial part. Let $(I_t, t \geq 0)$ be the intrinsic Brownian motion starting from 0. We denote by $(I_t^*, t \geq 0)$ the continuous process starting from 0, whose radial part is the intrinsic Brownian motion, but which propagates in a random chamber $w\mathfrak{a}_+$, where w is chosen independently and with respect to the uniform probability on W. This is a typical example of a strong Markov process which is not Feller (it does not satisfy Blumenthal's zero-one law). We have

Theorem 3.7.1 *Let $k > 0$. The normalized F_0-process $(Y_t^T, t \geq 0)$ starting at any $x \in \mathfrak{a}$ converges in distribution in $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathfrak{a})$ to $(I_t^*, t \geq 0)$.*

Proof : The first step is to prove that $(Y_t^{W,T}, t \geq 0)$ converges in law in $C(\mathbb{R}^+, \overline{\mathfrak{a}_+})$ to $(I_t, t \geq 0)$. Thanks to Lemma 3.7.2 we can use the same proof as for Theorem 5.5 in [A–B–J]. The result about the convergence of the semigroup needed in the proof was established in [Sch1]. Now let $\mathbb{P}^0$ be the law of the F_0-process, and let $\mathbb{P}$ be the one of the HO-process. By definition we have the absolute continuity relation

$$\mathbb{P}^0_{|\mathcal{F}_t} = \frac{F_0(Y_t)}{F_0(x)} e^{\frac{|\rho|^2}{2}t} \cdot \mathbb{P}_{|\mathcal{F}_t}.$$

Since F_0 is bounded (cf [O1]) Proposition 3.5.1 implies that for any $t > 0$, $\mathbb{E}^0[\sum_{s \leq t} |\Delta Y_s|] < +\infty$. Thus by Girsanov theorem (see [R–Y]) and Proposition 3.5.2 we get the semimartingale decomposition of the F_0-process :

$$\begin{aligned} Y_t &= x + \underbrace{\beta_t + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} M_t^\alpha \alpha}_{:= M_t} + \int_0^t \nabla \log \delta^{\frac{1}{2}} F_0(Y_s) ds \\ &- \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} \frac{k_\alpha}{2} \alpha \int_0^t \frac{(\alpha, Y_s)}{2 \sinh^2 \frac{(\alpha, Y_s)}{2}} ds, \end{aligned}$$

where $(\beta_t, t \geq 0)$ is a $\mathbb{P}^0$-Brownian motion and the M^α's are defined by (3.6) (with Y_s in place of X_s). We set $M_t^T := \frac{1}{\sqrt{T}} M_{tT}$. By Proposition 3.5.2 we know that

$$< M^T >_t := \sum_{i=1}^n < M_i^T >_t = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} \frac{k_\alpha}{4} \int_0^t \frac{(\alpha, \sqrt{T} Y_s^T)^2}{\sinh^2 \frac{\sqrt{T}}{2} (\alpha, Y_s^T)} ds,$$

where M_i^T is the i^{th} coordinate of M^T in the canonical basis. Now for all $w \in W$ the preceding sum remains unchanged if $\mathcal{R}^+$ is replaced by $w\mathcal{R}^+$. Therefore we can replace Y_s^T by $Y_s^{W,T}$ in the last equality. Moreover $\sinh x \geq x + \frac{x^3}{6}$ on $\mathbb{R}^+$. Hence

$$< M^T >_t \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} k_\alpha \int_0^t \frac{1}{1 + \frac{T}{12} (\alpha, Y_s^{W,T})^2} ds.$$

Thus by using the first step, we see that for any fixed $t > 0$, $\mathbb{E}[< M^T >_t] \to 0$ when $T \to +\infty$. It implies by Doob's L^2-inequality (see [R–Y]), that $(M_t^T, t \geq 0)$ converges in law in $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathfrak{a})$ to 0. Now the triangular inequality implies that for any $A > 0$, $\epsilon > 0$ and $\alpha > 0$,

$$\mathbb{P}\left[\sup_{|s-t|\leq\epsilon,\ s\leq t\leq A} |Y_s^T - Y_t^T| \geq \alpha\right] \leq \mathbb{P}\left[\sup_{|s-t|\leq\epsilon,\ s\leq t\leq A} |Y_s^{W,T} - Y_t^{W,T}| \geq \frac{\alpha}{2N}\right] + \mathbb{P}\left[\sum_{s\leq A} |\Delta Y_s^T| \geq \frac{\alpha}{2}\right],$$

where N is the number of Weyl chambers. Thus using that $\Delta Y^T = \Delta M^T$, tightness of $(Y_t^{W,T}, t \geq 0)$, and standard results (see Theorem 3.21 p. 314 and Proposition 3.26 p. 315 in [Jac–Sh] for instance), we see that the sequence $(Y_t^T, t \geq 0)$ is C-tight in $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathfrak{a})$, i.e. it is tight and any limit law of a subsequence is supported on $C(\mathbb{R}^+, \mathfrak{a})$. By the first step each limit has a radial part equal to the intrinsic Brownian motion. Since we know that the intrinsic Brownian motion does not touch the walls (in strictly positive time), each limit process is necessarily of the type $(wI_t, t \geq 0)$ where w is some random variable on W. Thus in order to identify the limit, we need to prove that the law of w has to be the uniform probability on W, and that w is independent of the radial part. For the law of w first, let us just observe that when the process starts from 0, the result is immediate since by W-invariance of $\mathcal{D}$ and F_0, the law of the F_0-process is W-invariant, and thus the law of any limit also. However when $x \neq 0$ we can not argue like this, and we need to prove for instance that the law of Y_1^T converges to the law of I_1^*, when $T \to \infty$. Let $f : \mathfrak{a} \to \mathbb{R}$ be continuous and bounded. We have

$$\mathbb{E}_{\frac{x}{\sqrt{T}}}\left[f(\frac{Y_T}{\sqrt{T}})\right] = \int_{\mathfrak{a}} p_T(\frac{x}{\sqrt{T}}, \sqrt{T}y)\frac{F_0(\sqrt{T}y)}{F_0(\frac{x}{\sqrt{T}})}e^{\frac{|\rho|^2}{2}T} f(y)d\mu(\sqrt{T}y).$$

Then it results from the asymptotic of $p_T(\frac{x}{\sqrt{T}}, \sqrt{T}y)$ and of $F_0(\sqrt{T}y)$ proved in [Sch1], that

$$p_T(\frac{x}{\sqrt{T}}, \sqrt{T}y)\frac{F_0(\sqrt{T}y)}{F_0(\frac{x}{\sqrt{T}})}e^{\frac{|\rho|^2}{2}T}d\mu(\sqrt{T}y) \to \text{const}\cdot e^{-\frac{|y|^2}{2}} \prod_{\alpha\in\mathcal{R}^+} (\alpha, y)^2 dy,$$

which gives the density of the law of I_1^* (see [A–B–J] for instance for the law of I_1). We conclude by Sheffé's lemma. Now the only missing part is the independence of w and $(I_t, t \geq 0)$. Observe first that since any limit process is adapted, w is $\mathcal{F}_{0^+}$-measurable. On the space $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathfrak{a})$, we denote by $(\mathcal{F}_t^W)_{t\geq 0}$ the natural filtration of the radial process. We know that $(I_t, t \geq 0)$ is an $(\mathcal{F}_t^W)_{t\geq 0}$-Markov process. We will prove that it is also an $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Markov process. Indeed since it is a.s. continuous and equal to 0 at time 0, this will imply the independence with w. We know that $Y^{W,T}$ is an $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Markov process, since it is the projection of Y^T. We denote by $P^{W,T}$ the semigroup of $Y^{W,T}$, and by Q^W the semigroup of $(I_t, t \geq 0)$. In particular we already know that for $t \geq 0$ and any continuous and bounded function f, $P_t^{W,T} f$ converges simply to $Q_t^W f$ when $T \to \infty$. For $s < t$, and f and g continuous and bounded functions, we have $\mathbb{E}[f(Y_t^{W,T})g(Y_s^T)] = \mathbb{E}[P_{t-s}^{W,T} f(Y_s^{W,T})g(Y_s^T)]$.

For a suitable subsequence of T, the first term tends to $\mathbb{E}[f(I_t)g(\nu I_s)]$, and the second term tends to $\mathbb{E}[Q^W_{t-s}f(I_s)g(\nu I_s)]$, which implies the desired result. This finishes the proof of the theorem. $\square$

We can now prove a generalization of a result of Bougerol and Jeulin [B–J1]. Let $(R^{0,T}_t, 0 \leq t \leq 1)$ be the normalized HO-bridge of length T around 0. It is defined for $t \geq 0$ by

$$R^{0,T}_t = \frac{1}{\sqrt{T}} X^{0,T}_t.$$

Theorem 3.7.2 *Let $k > 0$. When $T \to \infty$, the process $(R^{0,T}_t, 0 \leq t \leq 1)$ converges in distribution in $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathfrak{a})$ to the bridge $(I^{\{*,0,0,1\}}_t, 0 \leq t \leq 1)$ of length 1 associated to $(I^*_t, 0 \leq t \leq 1)$.*

Proof : Here again we can follow the same proof as in [B–J1]. We just need to take care that the estimate of the heat kernel in Proposition 5.3 in [Sch1], is uniform when y lies in some compact subset of $\mathfrak{a}_+$. But this results directly from the proof of this proposition. $\square$

Remark 3.7.2 We can define similarly the normalized radial HO-bridge around any $a \in \overline{\mathfrak{a}_+}$. With the same proof, we can also prove that it converges to the bridge $(I^{\{0,0,1\}}_t, 0 \leq t \leq 1)$ of length 1 associated to the intrinsic Brownian motion starting from 0. Let us just notice that in dimension 1 this is the bridge of a Bessel-3, which is also the normalized Brownian excursion. Thus we do recover the result of [B–J2].

Deuxième partie

Marches aléatoires sur un immeuble affine de type $\tilde{A}_r$

Chapitre 4

Estimations du noyau de la chaleur et de la fonction de Green

Ce chapitre est composé d'un article [A–Sch–Tro1], écrit en commun avec Jean-Philippe Anker et Bartosz Trojan.

Résumé : *Nous obtenons une estimation globale de la densité de transition* $p^n(0,x)$ *associée à une marche aléatoire au plus proche voisin, appelée ici "simple", sur un immeuble affine de type* $\tilde{A}_r$*. Nous en déduisons ensuite une estimation globale de la fonction de Green. C'est l'analogue d'un résultat de Anker–Ji [A–Ji] et Anker–Ostellari [A–Ost1] [A–Ost2] sur un espace symétrique riemannien de type non compact.*

Abstract : *We obtain a global estimate of the transition density* $p^n(0,x)$ *associated to a nearest neighbor random walk, called here "simple", on affine buildings of type* $\widetilde{A}_r$*. Then we deduce a global estimate of the Green function. This is the analogue of a result of Anker–Ji [A–Ji] and Anker–Ostellari [A–Ost1] [A–Ost2] on a Riemannian symmetric space of the noncompact type.*

4.1 Introduction

This work is meant as a first attempt to understand the full behavior of random walks on affine buildings of higher rank. Such a study was carried out by Lalley (see [Lal1], [Lal2] and the report in [Wo]) for rather general random walks on rank one buildings i.e. homogeneous trees, and by the first author (in the joint works [A–Ji], [A–Ost1], [A–Ost2]) for the heat diffusion on a general Riemannian symmetric space of the noncompact type, which is a continuous counterpart of the present discrete setting. Apart from its own interest, this information is pivotal for further study. For instance, in potential theory, it is used to estimate the Green's function and to describe the Martin boundary. It will also be used in [Sch3] to study the asymptotic of normalized bridges.

Our paper deals with a simple higher rank case. We consider buildings of type $\widetilde{A}_r$, which are known to be most simple among affine buildings, and a particular random walk to the nearest neighbors, that we shall call "simple". This random walk, actually its Fourier transform, satisfies a "magic" combinatorial formula, which is technically very helpful. Our main result is a global upper bound for the transition density $p^n(x,y)$, which is also a lower bound, at least when $n-d(x,y)$ is large enough. As a consequence, we get the same upper and lower bound for the Green function, away from the diagonal. In rank one, we recover in a simpler way the main result of Lalley [Lal1], specialized to the simple random walk (see [A–Sch–Tro1] for more details).

Our method consists in analyzing carefully the transition density, using the inverse Fourier transform. Recall that Fourier analysis was developed in the seventies by Macdonald [Mac2] for p–adic like buildings. It was resumed recently, first by Cartwright [Ca] for affine buildings of type $\widetilde{A}_r$ and next by Parkinson ([Par1], [Par2], [Par3]) in the general case. Notice that these authors used it already to study isotropic random walks ([Ca–Wo], [Par1], [Par4]). They obtained in particular local and central limit theorem i.e. the asymptotics of the transition densities $p^n(x,y)$ when $n\to+\infty$ and x,y remain fixed.

Our paper is organized as follows. In Section 2, we recall the setting of our study and specify the basic objects involved : affine buildings (of type $\widetilde{A}_r$), the (inverse) Fourier transform and the "simple" random walk on these spaces. Section 3 is devoted to the rank 2 case, which is typical of the higher rank case and which is easier to deal with first. In this case, our method works in fact for any isotropic nearest neighbor random walk. Moreover we obtain the same upper and lower bound for $p^n(x,0)$ in the full range $|x|\leq n$. Section 4 deals with the general case. The result is similar, except that the lower bound is not shown to hold in the range $n-C\leq|x|\leq n$, where C is some positive constant (possibly large). In Section 5, we deduce sharp estimates (same upper and lower bound) for the Green function, at or above the bottom of the l^2 spectrum.

4.2 Preliminaries

4.2.1 Root system

Let R be a root system of type A_r in a real vector space $\mathfrak{a}$. Let $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{a} + i\mathfrak{a}$ be the complexification of $\mathfrak{a}$, equipped with its inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle$. We shall briefly introduce some standard notation (for more details see e.g [Bou]). First let R^+ be a choice of positive roots. Let $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ be the set of simple roots. We denote by $\mathfrak{a}_+$ the associated positive Weyl chamber and by $\overline{\mathfrak{a}_+}$ its closure. Let $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ be the set of fundamental weights. Let $P = \sum_{i=1}^r \mathbb{Z}\lambda_i$ be the lattice of weights. Let P^+ be the subset of dominant weights, i.e. which lie in $\overline{\mathfrak{a}_+}$ and let P^{++} be the subset of strictly dominant weights i.e., those which lie in $\mathfrak{a}_+$. Let $Q = \sum_{i=1}^r \mathbb{Z}\alpha_i$ be the lattice of roots. We denote by W_0 the Weyl group and by $\widetilde{W}$ the extended affine Weyl group (see e.g [Par1]). For $\alpha \in R$, let $\alpha^\vee = \frac{2}{|\alpha|^2}\alpha$ be the coroot associated to α. We have

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} \alpha^\vee = \sum_{i=1}^r \lambda_i.$$

We can define q_w for all $w \in \tilde{W}$. Then if $t_\lambda \in \widetilde{W}$ is the translation by λ, we have (see e.g. [Par1])

$$q_{t_\lambda} = q^{\sum_{\alpha \in R^+} \langle \lambda, \alpha \rangle}.$$

If $\lambda \in P^+$, we denote by $W_{0\lambda}$ the stabilizer of λ under the action of W_0. If $\lambda = \sum_{i=1}^r n_i \lambda_i$, with $n_i \in \mathbb{N}$ for all i, we denote by $|\lambda| = \sum_{i=1}^r n_i$ the length of λ.

For $\lambda \in P^+$, we define $V_\lambda(O)$ to be the sphere of radius λ around O, and $N_\lambda = |V_\lambda(O)|$ its cardinality. Then we have (see [Ca])

$$N_\lambda = \frac{W_0(q^{-1})}{W_{0\lambda}(q^{-1})} q_{t_\lambda},$$

where $V(q^{-1}) = \sum_{w \in V} q_w^{-1}$, for all subgroups V of W_0. For $x \in V_\lambda(O)$ we set $|x| = |\lambda|$ and $\overline{x} = \lambda$. Then λ is called the radial part, or coordinate, of x. We set also $x_i = \langle \alpha_i, \lambda \rangle$ for all $i \leq r$.

Eventually, the function π is defined on P by

$$\pi(\lambda) = \prod_{\alpha \in R^+} \langle \alpha^\vee, \lambda \rangle .$$

4.2.2 The symmetric Macdonald polynomials

The Weyl denominator Δ and the functions $\mathbf{c}$ and b are defined respectively, for $z \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$, by

$$\Delta(z) = \prod_{\alpha \in R^+} \left(e^{\frac{\langle \alpha^\vee, z \rangle}{2}} - e^{-\frac{\langle \alpha^\vee, z \rangle}{2}}\right),$$

$$\mathbf{c}(z) = \prod_{\alpha \in R^+} \frac{1 - q^{-1} e^{-\langle \alpha^\vee, z \rangle}}{1 - e^{-\langle \alpha^\vee, z \rangle}},$$

$$\frac{1}{\mathbf{c}(z)} = \Delta(z) b(z) e^{-\sum_{i=1}^r \langle \lambda_i, z \rangle}.$$

In particular, $|b(i\theta + s)|$ is bounded above and below by a fixed strictly positive constant, for $(\theta, s) \in i\mathfrak{a} \times \overline{\mathfrak{a}_+}$. The symmetric Macdonald polynomial is defined (see [Mac2], [Par1]) for $\lambda \in P^+$ and $z \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ by

$$P_\lambda(z) = \frac{q_{t_\lambda}^{-\frac{1}{2}}}{W_0(q^{-1})} \sum_{w \in W_0} \mathbf{c}(w \cdot z) e^{\langle \lambda, w \cdot z \rangle}. \tag{4.1}$$

where $\cdot$ denotes the action of W_0 on $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$. Moreover, for the root systems of type A_r, we have

$$P_{\lambda_i}(z) = q_{t_{\lambda_i}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N_{\lambda_i}} \sum_{\lambda \in W_0 \cdot \lambda_i} e^{\langle \lambda, z \rangle}. \tag{4.2}$$

We define the function h for $z \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ by

$$h(z) = \sum_{i=1}^r \sum_{\lambda \in W_0 \cdot \lambda_i} e^{\langle \lambda, z \rangle}.$$

4.2.3 Affine building and averaging operators

Let $\mathcal{X}$ be the set of vertices of an affine building of type $\tilde{A}_r$ (see [Ron] or [Par2]). We fix a vertex O called the origin. By $\mathcal{A}$ we denote the algebra of averaging symmetric operators on $\mathcal{X}$. It was proved in [Ca] that $\mathcal{A}$ is a commutative algebra generated by the operators

$$\triangle_j f(x) = \frac{1}{N_{\lambda_j}} \sum_{y \in V_{\lambda_j}(O)} f(y), \quad j = 1, \dots, r,$$

where f is a complex-valued function on $\mathcal{X}$. Consider $l^2(\mathcal{X})$ with a natural scalar product

$$\langle f, g \rangle = \sum_{x \in \mathcal{X}} f(x) \overline{g(x)}.$$

Then the closure $\overline{\mathcal{A}}$ is a commutative C^*-algebra. Moreover, $\overline{\mathcal{A}}$ is isometrically isomorphic to the algebra of W_0-invariant continuous functions on

$$U = \{\theta \in \mathfrak{a} \mid \text{for all } \alpha \in R,\ \langle \alpha, \theta \rangle\ \leq \pi\},$$

and the Gelfand map is given by

$$\widehat{\triangle_j} = P_{\lambda_j}.$$

We observe here that U is W_0-invariant and a fundamental domain for the action of the lattice $2\pi Q$ on $\mathfrak{a}$. Eventually, for $A \in \overline{\mathcal{A}}$ we have the inversion formula

$$A\delta_y(x) = \frac{W_0(q^{-1})}{|W_0|} \int_U \widehat{A}(\theta)\overline{\widehat{\triangle_j}(\theta)} \frac{d\theta}{|\mathbf{c}(\theta)|^2},$$

for $x, y \in \mathcal{X}$ and $y \in V_{\lambda_j}(x)$.

4.2.4 The simple random walk

This is defined as the Markov chain on $\mathcal{X}$, with transition probabilities given by

$$p(x,y) = \begin{cases} q_{t_{\lambda_i}}^{-\frac{1}{2}}\rho & \text{if } y \in V_{\lambda_i}(x) \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where

$$\rho = \frac{1}{\sum_{i=1}^r q_{t_{\lambda_i}}^{-\frac{1}{2}} N_{\lambda_i}}.$$

Let also $\tilde{\rho} = \rho h(0)$ be the associated spectral radius. For example for the tree, i.e. the $\tilde{A}_1$ case, we have $\tilde{\rho} = \frac{2\sqrt{q}}{q+1}$. In the case $\tilde{A}_2$ we have

$$\tilde{\rho} = \frac{3q}{q^2+q+1},$$

and in the case $\tilde{A}_3$,

$$\tilde{\rho} = \frac{14q^2}{(1+q^2)[(q^2+q+1)+2q^{\frac{1}{2}}(q+1)]}.$$

4.2.5 The function F_0

It is defined on P^+ by

$$F_0(\lambda) = P_\lambda(0).$$

The following Proposition is the analogue of a result obtained in [A1] and generalized in [Sch1].

Proposition 4.2.1 *In P^+,*

$$F_0(\lambda) \asymp {}^1 q_{t_\lambda}^{-\frac{1}{2}} \prod_{\alpha \in R^+} (1 + \langle \alpha^\vee, \lambda \rangle). \tag{4.3}$$

Moreover,

$$F_0(\lambda) \sim {}^2 const \cdot \pi(\lambda) q_{t_\lambda}^{-\frac{1}{2}}, \tag{4.4}$$

when $\langle \alpha, \lambda \rangle \to +\infty$, for all $\alpha \in R^+$.

Proof : First we multiply (4.1) by $\pi(i\theta)$ removing the singularities of the **c**-function, and then we apply the operator $\pi(-i\partial)|_{\theta=0}$. Since the left hand side is equal to $F_0(\lambda)$ up to a constant, we get

$$q_{t_\lambda}^{\frac{1}{2}} F_0(\lambda) = p(\lambda),$$

where p is a polynomial in coordinates of λ with highest order term proportional to $\pi(\lambda)$. This proves (4.4) and (4.3) away from the walls. Next we extend our estimate along the walls by using a local Harnack principle. This is obtained immediately by using that F_0 is an eigenfunction of the averaging operators :

$$\sum_{y \in V_{\lambda_i}(x)} p(x, y) F_0(\overline{y}) = \rho |W_0 \cdot \lambda_i| F_0(\overline{x}),$$

for all $x \in \mathcal{X}$ and all $i \leq r$. □

4.3 Heat kernel estimates : the case $\tilde{A}_2$

Let $n \in \mathbb{N}$ and $x \in V_\lambda(O)$. Let $\alpha_0 = \alpha_1 + \alpha_2$. We set $\delta = \frac{1}{n+2}(\lambda + \lambda_1 + \lambda_2)$. For $i = 0, 1, 2$ we put $\delta_i = \langle \delta, \alpha_i \rangle$. Let

$$\phi(\delta) = \min\{u \in \overline{\mathfrak{a}_+} \mid \log h(u) - \langle \delta, u \rangle\}.$$

The main goal of this section is to prove

Theorem 4.3.1 *The following estimate*

$$p^n(0, x) \asymp \frac{1}{n^3} \rho^n e^{n\phi(\delta)} F_0(\overline{x}) \frac{1}{\sqrt{n^2(1-\delta_0)(1-\delta_1)(1-\delta_2)}}, \tag{4.5}$$

holds uniformly on the set $\{|x| \leq n-1\}$.

[1] we say that $f \asymp g$, when there exists a constant $C > 0$ such that, $\frac{1}{C} g(\lambda) \leq f(\lambda) \leq C g(\lambda)$ for all λ.

[2] we say that $f \sim g$, when $\frac{f}{g} \to 1$.

We will see that the function $e^{\phi(\delta)}$ is bounded. Thus the exponent n in the theorem can be replaced by $n+2$, which appears more naturally in the proof. The next theorem gives a more precise statement of the estimate at the boundary of the domain. We adopt the following notation for the binomial coefficients :

$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Theorem 4.3.2 *Let $K > 0$. Then*

$$p^n(0,x) \asymp n^d (\rho q^{-1})^n C_{x_1 \vee x_2 - d}^{n-d} \tag{4.6}$$

uniformly in the set $\{n \geq |x| \geq n-K\}$, where $d = n - |x|$.

note 4.3.1 *When $n - x_1 \vee x_2 \leq K'$ for some fixed constant $K' > 0$, then the estimate becomes*

$$p^n(0,x) \asymp (\rho q^{-1})^n n^{(n-x_1 \vee x_2)+d}.$$

Remark 4.3.1 Here is the corresponding result for the tree (cf [A–Sch–Tro1]). In this case we can give an explicit formula of the function ϕ appearing in the estimate. In fact we have

$$p^n(0,x) \asymp \frac{|x|}{n\sqrt{n-|x|}} \rho^n e^{n\phi(\delta)} q^{-\frac{|x|}{2}},$$

where

$$\phi(\delta) = \frac{1}{2}\{(1+\delta)\log(1+\delta) + (1-\delta)\log(1-\delta)\}.$$

4.3.1 Proof : the beginning

If $\theta = \theta_1 \alpha_1 + \theta_2 \alpha_2$, we set $|\theta|_\infty = \max\{|\theta_1|, |\theta_2|\}$. We say that a weight is away from a wall, when its distance to the wall is larger than some fixed constant (which will be determined in the proof). We denote by C a constant whose value may change from line to line.

We begin by some elementary transformations of $p^n(O,x)$. First, by using (4.2), we get

$$\begin{aligned} p^n(0,x) &= C \int_U \left(\frac{1}{2} P_{\lambda_1}(i\theta) + \frac{1}{2} P_{\lambda_2}(i\theta) \right)^n P_\lambda(i\theta) \frac{d\theta}{|\mathbf{c}(i\theta)|^2} \\ &= C\rho^n \int_U h^n(i\theta) P_\lambda(i\theta) \frac{d\theta}{|\mathbf{c}(i\theta)|^2}. \end{aligned}$$

Next by (4.1) and the W_0-invariance of h, we get

$$p^n(0,x) = C\rho^n q_{t_\lambda}^{-\frac{1}{2}} \int_U h^n(i\theta) e^{-i\langle \theta, \lambda + \lambda_1 + \lambda_2 \rangle} \Delta(i\theta) b(i\theta) d\theta. \tag{4.7}$$

Now we make two elementary observations. First

$$h + 2 = (1 + e^{\lambda_1})(1 + e^{-\lambda_2})(1 + e^{\lambda_2 - \lambda_1}). \tag{4.8}$$

Moreover, we have the following lemma, whose proof is left to the reader (see also Section 4.4 for a more general result).

Lemma 4.3.1

$$\pi(\partial)[h^{n+3}] = (n+3)(n+2)(n+1)\left[\frac{n+3}{n+1}h+2\right]h^n\Delta.$$

The idea now is to use Lemma 4.3.1 and integrate by parts in (4.7). This will be done in two different ways, depending on if $|x| \leq \frac{n}{2}$ or if $|x| > \frac{n}{2}$. We notice that the factor $\frac{1}{2}$ plays no role here, and could be replaced by $1-\eta$ for any $\eta \in (0,1)$.

4.3.2 The case when $|x| \leq \frac{n}{2}$

We consider the function

$$q^n(x) = \frac{n+3}{(n+1)\rho}p^{n+1}(0,x) + 2p^n(0,x).$$

By Lemma 4.3.1, after an integration by parts we get the expression

$$q^n(x) = C\frac{\rho^n q_{t_\lambda}^{-\frac{1}{2}}}{(n+3)(n+2)(n+1)}\int_U h^{n+3}(i\theta)\pi(\partial)\left[e^{-i\langle\theta,\lambda+\lambda_1+\lambda_2\rangle}b(i\theta)\right]d\theta.$$

Now we make the change of variables $i\theta \to i\theta + s$ for some $s \in \overline{\mathfrak{a}_+}$ whose value will be specified in the sequel, and we find

$$q^n(x) = C\frac{\rho^n q_{t_\lambda}^{-\frac{1}{2}}e^{-\langle\lambda+\lambda_1+\lambda_2,s\rangle}}{(n+3)(n+2)(n+1)}\int_U h^{n+3}(i\theta+s)\pi(\partial)[e^{-i\langle\theta,\lambda+\lambda_1+\lambda_2\rangle}b(i\theta+s)]d\theta.$$

Moreover $b(i\theta+s)$ and all its derivatives are bounded functions of $(\theta,s) \in U \times \overline{\mathfrak{a}_+}$. Thus for x or λ sufficiently away from the walls,

$$\begin{aligned} q^n(x) \quad &= C\frac{\rho^n q_{t_\lambda}^{-\frac{1}{2}}e^{-\langle\lambda+\lambda_1+\lambda_2,s\rangle}\pi(\lambda+\lambda_1+\lambda_2)}{(n+3)(n+2)(n+1)} \\ &\times \int_U h^{n+3}(i\theta+s)e^{-i\langle\theta,\lambda+\lambda_1+\lambda_2\rangle}b(i\theta+s)d\theta + \text{lower order terms.} \end{aligned}$$

4.3.3 The case when $|x| > \frac{n}{2}$

In this case q^n and p^n are not anymore comparable. However, when λ is sufficiently away from the wall $\{\alpha_1-\alpha_2=0\}$, then it results from (4.8) and our choice of s in the next subsection (see also Remark 4.3.2), that at least for n sufficiently large, the function $\theta \mapsto \frac{1}{\frac{n+3}{n+1}h(i\theta+s)+2}$ does not vanish on U. Thus after an integration by parts in (4.7), we see that for λ away from the walls $\{\alpha_2=0\}$ and $\{\alpha_1-\alpha_2=0\}$,

$$\begin{aligned} p^n(0,x) \quad &= \quad C\frac{\rho^n q_{t_\lambda}^{-\frac{1}{2}}e^{-\langle\lambda+\lambda_1+\lambda_2,s\rangle}\pi(\lambda+\lambda_1+\lambda_2)}{(n+3)(n+2)(n+1)} \\ &\times \quad \int_U h^{n+3}(i\theta+s)e^{-i\langle\theta,\lambda+\lambda_1+\lambda_2\rangle}(b_1+b_2)(i\theta+s)d\theta, \end{aligned}$$

where $b_1 = \frac{b}{\frac{n+3}{n+1}h+2}$ and $b_2 = \frac{e^{i(\lambda+\lambda_1+\lambda_2)}}{\pi(\lambda+\lambda_1+\lambda_2)}\pi(\partial)[b_1e^{-i(\lambda+\lambda_1+\lambda_2)}] - b_1$ is the remainder.

4.3.4 Choice of s and the stationary phase method

In the preceding subsections we have seen that $q^n(x)$, in the range $|x| \leq \frac{n}{2}$, and $p^n(0,x)$, in the range $|x| > \frac{n}{2}$, were comparable for λ away from the walls to

$$C(n,\lambda)\int_U \frac{h^{n+2}(i\theta+s)}{h^{n+2}(s)} e^{-i\langle\theta,\lambda+\lambda_1+\lambda_2\rangle}\tilde{b}(i\theta+s)d\theta, \tag{4.9}$$

with

$$C(n,\lambda) = \frac{\rho^n q_{t_\lambda}^{-\frac{1}{2}} e^{-\langle\lambda+\lambda_1+\lambda_2,s\rangle} h^{n+2}(s)\pi(\lambda)}{n^3},$$

and $\tilde{b}$ equal to hb or $h(b_1+b_2)$ respectively if $|x| \leq \frac{n}{2}$ or if $|x| > \frac{n}{2}$. Now we choose the shift s according to the stationary phase method, i.e. as a solution in $\overline{\mathfrak{a}_+}$ of the equation

$$\frac{\nabla h}{h}(s) = \delta. \tag{4.10}$$

Solving such an equation is classical. We consider the function $\phi^\delta : u \mapsto \log h(u) - \langle\delta,u\rangle$ on $\mathfrak{a}$. Since $|\delta| < 1$ (by hypothesis $|x| < n$), this function tends to infinity when $|u| \to +\infty$. Moreover, h is W_0-invariant, and $\langle\delta,u\rangle$ is maximal when $u \in \overline{\mathfrak{a}_+}$. Thus ϕ^δ attains its minimum in $\overline{\mathfrak{a}_+}$ at some point $s = s(\delta)$, which satisfies equation (4.10). Without loss of generality, we will assume in the sequel that $\langle\lambda_1,s\rangle \geq \langle\lambda_2,s\rangle$. The following lemma collects some properties of s.

Lemma 4.3.2 *1. The condition $\langle\lambda_1,s\rangle \geq \langle\lambda_2,s\rangle$ implies $\delta_1 \geq \delta_2$.*

2. The function ϕ^δ is strictly convex, thus s is the unique point where it attains its minimum, and $\delta \mapsto s$ is continuous on $\{|\delta| < 1\}$.

3. When $|\delta| \to 1$, $|s| \to +\infty$, where $|s|$ is the Euclidean norm of s. More precisely, when $|\delta| \to 1$,

$$e^{\langle\lambda_2-\lambda_1,s\rangle} = \frac{1-\delta_1}{\delta_1} + O(e^{-\langle\lambda_2,s\rangle}),$$

$$e^{-\langle\lambda_2,s\rangle} \asymp 1-|\delta|.$$

4. We have $s = 0$ if, and only if, $\delta = 0$. When $\delta_1 - \delta_2 \to 0$, then

$$\langle\lambda_2-\lambda_1,s\rangle \asymp \delta_1-\delta_2.$$

Proof : Equation (4.10) is equivalent to the system

$$\begin{cases} \sinh\langle\lambda_1,s\rangle + \sinh\langle\lambda_1-\lambda_2,s\rangle = & \delta_1 h \\ \sinh\langle\lambda_2,s\rangle - \sinh\langle\lambda_1-\lambda_2,s\rangle = & \delta_2 h. \end{cases} \tag{4.11}$$

The first statement follows since sinh is increasing and has the same sign than its argument. The convexity of ϕ^δ comes from a more general result : assume that $h = \sum_\lambda e^\lambda$ is a sum of exponentials. Then the second order derivative $d^2\phi^\delta_u$ of ϕ^δ at some point $u \in \mathfrak{a}$ is given by

$$d^2\phi^\delta_u = \frac{hd^2h - |\nabla h|^2}{h^2}(u) = \frac{1}{h^2(u)}\sum_{\lambda\neq\lambda'}[\lambda-\lambda']^2 e^{\langle\lambda+\lambda',u\rangle},$$

which implies that $d^2\phi^\delta_u$ is positive definite. Thus ϕ^δ is strictly convex. The second point follows immediately. By adding the both equations of (4.11), and because $\sinh < \cosh$, we see that $|s| \to \infty$ when $|\delta| \to 1$. Multiplying by $e^{-\langle \lambda_1, s\rangle}$ in both side of the first equation gives immediately the asymptotic of $e^{\langle \lambda_2 - \lambda_1, s\rangle}$. Doing the same in the sum of the two equations gives the asymptotic of $e^{-\langle \lambda_2, s\rangle}$. By doing now the difference between them, we obtain in the same way the last point. The assertion that $s = 0$ if, and only if, $\delta = 0$ is straightforward. This concludes the proof of the lemma. $\square$

Remark 4.3.2

1. As announced, the estimates of the lemma show that the function $e^{\phi(\delta)} = h(s)e^{-\langle \delta, s\rangle}$ in (4.5) is bounded.
2. The last point of the lemma implies that $(1+e^{\langle \lambda_2-\lambda_1, i\theta+s\rangle})$ is larger (up to a constant) than $\delta_1 - \delta_2$ for any $\theta \in U$. Thus, thanks to Formula (4.8), we see that for n and $\langle \alpha_1 - \alpha_2, \lambda\rangle$ large enough, $\frac{n+3}{n+1}h+2$ does not vanish in U. This justifies our assumption of section 4.3.3.

We consider now the phase function

$$F^\delta(\theta) = \log h(i\theta + s) - \log h(s) - i\,\langle \delta, \theta\rangle \tag{4.12}$$

which is well defined at least in a small neighborhood of 0, independent of s (or δ). By our choice of s, $F^\delta(0) = 0$ and $\nabla F^\delta(0) = 0$. The next lemma gives a much more precise result on the behavior of F^δ near 0. Let $\Re F^\delta$ and $\Im F^\delta$ denote respectively the real and imaginary part of F^δ.

Lemma 4.3.3 *There exists two constants $\epsilon > 0$ and $C > 0$ such that,*

$$\Re F^\delta(\theta) \asymp -q_\delta(\theta), \ \textit{and}\ |\Im F^\delta(\theta)| \le C|\theta|_\infty q_\delta(\theta),$$

uniformly for $|\theta|_\infty \le \epsilon$ and $|\delta| < 1$, where

$$q_\delta(\theta) = e^{\langle \lambda_2-\lambda_1, s\rangle}\,\langle \lambda_1 - \lambda_2, \theta\rangle^2 + e^{-\langle \lambda_2, s\rangle}\,\langle \lambda_2, \theta\rangle^2 .$$

Proof : Since $F^\delta(0) = 0$ and $\nabla F^\delta(0) = 0$, we see that for all $\theta \in U$, there exists $\theta' \in U$ such that $|\theta'|_\infty \le |\theta|_\infty$ and

$$F^\delta(\theta) = d^2F^\delta_{\theta'}(\theta),$$

where $d^2F^\delta_{\theta'}$ is the second order derivative of F^δ in θ'. We can compute it, as we did for ϕ^δ in Lemma 4.3.2 :

$$\begin{aligned} d^2F^\delta_{\theta'}(\theta) &= \frac{-1}{h(i\theta'+s)^2}\sum_{\lambda,\lambda'} \langle \lambda - \lambda', \theta\rangle^2 e^{\langle \lambda+\lambda', i\theta'+s\rangle} \\ &= \frac{-1}{|h(i\theta'+s)|^4}\sum_{\lambda,\lambda',\mu,\mu'} \langle \lambda - \lambda', \theta\rangle^2 e^{\langle \lambda+\lambda'+\mu+\mu', s\rangle} e^{i\langle \lambda+\lambda'-\mu-\mu', \theta'\rangle}. \end{aligned}$$

Next observe that $|h(i\theta' + s)e^{-\langle\lambda_1,s\rangle}|$ is bounded above and below by strictly positive constants, when $|\theta'|_\infty$ is small. So if we multiply up and down the right member of the last equality by $e^{-4\langle\lambda_1,s\rangle}$, and then take successively the real part and the imaginary part, we get the two assertions of the lemma. □

We denote by $J(n,\lambda)$ the integral appearing in (4.9). According to the notation of the preceding lemma, let $\epsilon' < \epsilon$ (taken small in the next proposition). We divide $J(n,\lambda)$ into the sum of the integral, let say $J_1(n,\lambda)$, over $[-\epsilon',\epsilon']^2$ and the integral $J_2(n,\lambda)$ over $U \setminus [-\epsilon',\epsilon']^2$, where $[-\epsilon',\epsilon']^2$ denotes the set $\{|\theta|_\infty \leq \epsilon'\}$.

Proposition 4.3.1 *There exists $\epsilon' > 0$ (independent of δ and n), such that the following estimates hold for n large enough and λ away from the walls*

$$|J_1(n,\lambda)| \asymp \frac{1}{\sqrt{n^2(1-\delta_1)(1-|\delta|)}},$$

$$|J_2(n,\lambda)| \leq \frac{C}{\sqrt{n(1-\delta_1)}} e^{-cn(1-|\delta|)},$$

where C and c are two strictly positive constants.

Proof : We have

$$J_1(n,\lambda) = \int_{|\theta|_\infty \leq \epsilon'} e^{(n+2)F^\delta(i\theta+s)} \tilde{b}(i\theta+s)d\theta.$$

Thus essentially the first statement of the proposition is given by Lemma 4.3.3, and a change of variable. In fact we just need in addition a control of $\tilde{b}(i\theta+s)$ for small θ's. In the case where $|x| \leq \frac{n}{2}$, this is immediate, since $|b|$ is bounded above and below by strictly positive constants, and by continuity of $\delta \mapsto s$, $|h|$ also, if ϵ' is sufficiently small. In the other case, where $|x| > \frac{n}{2}$, by (4.8), we see that $|h+2|$ stays away from 0 if $|\theta|_\infty$ is small. Thus for λ sufficiently away from the walls, b_2 becomes negligible in front of b_1. Then since $(hb_1)(s)$ is real and bounded (above and below) on $\overline{\mathfrak{a}_+}$, this gives the desired estimate of $|J_1(n,\lambda)|$. The estimate of J_2 is more complicated, since $|hb_2|$ may become larger than $|hb_1|$ and even explode, for instance when $\langle\lambda_2 - \lambda_1, \theta\rangle = \pm\pi$, and $\delta_1 - \delta_2$ tends to 0 (cf. (4.8)). Fortunately, as we will see, this is compensated by the exponential decay of $e^{(n+2)\Re F^\delta(i\theta+s)}$. Indeed

$$\frac{|h(i\theta+s)|}{h(s)} = e^{\frac{1}{2}\log(1-(1-\frac{|h(i\theta+s)|^2}{h^2(s)}))} \leq e^{-\frac{1}{2}[1-\frac{|h(i\theta+s)|^2}{h^2(s)}]}.$$

But

$$1 - \frac{|h(i\theta+s)|^2}{h^2(s)} = \frac{1}{h^2(s)} \sum_{\lambda,\lambda'} e^{\langle\lambda+\lambda',s\rangle}(1-\cos\langle\lambda-\lambda',\theta\rangle).$$

Multiplying again the numerator and denominator by $e^{-2\langle\lambda_1,s\rangle}$, we obtain

$$1 - \frac{|h(i\theta+s)|^2}{h^2(s)} \geq c\sum_{\lambda,\lambda'} e^{\langle\lambda+\lambda'-2\lambda_1,s\rangle} \langle\lambda-\lambda',\theta\rangle^2,$$

for some constant $c > 0$. Observe now that since $s = 0 \Leftrightarrow \delta = 0$ and s is continuous, then s stays away from 0 when $|x| > \frac{n}{2}$. In particular $\langle \lambda_1, s\rangle$ and $\langle \lambda_2, s\rangle$ stay also away from 0. Therefore with (4.8) we see that $|b_1|$ or $|b_2|$ can explode only when $1 + e^{\lambda_2 - \lambda_1}$ is small, i.e when $\langle \lambda_2 - \lambda_1, \theta\rangle \pm \pi$ and $\delta_1 - \delta_2$ are small. But in this case

$$(n+2)e^{\langle \lambda_2 - \lambda_1, s\rangle} \langle \lambda_2 - \lambda_1, \theta\rangle^2 \asymp (n+2)(1-\delta_1) \asymp n,$$

since $\delta_1 - \delta_2$ small implies that $1 - \delta_1$ is away from 0. As a consequence

$$e^{-\frac{c}{2}(n+2)\sum_{\lambda,\lambda'} e^{\langle \lambda+\lambda'-2\lambda_1, s\rangle} \langle \lambda - \lambda', \theta\rangle^2} (|hb_1(i\theta + s)| + |hb_2(i\theta + s)|)$$

is bounded in U. The estimate of $|J_2(n, \lambda)|$ follows with Lemma 4.3.2 and a change of variable. □

By the preceding proposition, when $n(1 - |\delta|) \to \infty$, J_2 becomes negligible in front of J_1. Thus we can find a constant $K > 0$ such that $C(n, \lambda)|J(n, \lambda)|$ has the estimate (4.5) when λ is away from the walls and $n(1 - |\delta|) \geq K$. Moreover the preceding proposition implies also that $C(n, \lambda)|J(n, \lambda)|$ is bounded by the expression in (4.5). Now the rest of the proof can be decomposed into two steps. First we prove the lower estimate when $n(1 - |\delta|) \leq K$. Then we extend our estimate along the walls by using a local Harnack principle, and we prove by the way that $q^n(x)$ is comparable to $p^n(0, x)$ when $|x| \leq \frac{n}{2}$.

4.3.5 Lower bound when $n(1 - |\delta|) \leq K$

We present two proofs. The first is analytical, and the second is purely combinatorial. One advantage of the second proof is that it is valid in the whole range $n(1 - |\delta|) \leq K$, whereas the first is only valid when λ is away from the walls $\{\alpha_2 = 0\}$ and $\{\alpha_1 - \alpha_2 = 0\}$. Another advantage of the combinatorial approach is that it provides a more elementary proof of the upper bound.

Analytical proof

We begin by

Lemma 4.3.4 *When $(n+2)(1-\delta_1) \to +\infty$ and $(n+2)(\delta_1 - \delta_2) \to +\infty$, then $\tilde{b}(i\theta + s) \to 1$, uniformly in U.*

Proof : Two cases may cause problems. Either when $\delta_1 - \delta_2$ tends to 0. But in this case $\langle \alpha, \lambda\rangle \asymp n$ for all $\alpha \in \mathbb{R}^+$, since the line $\lambda_1 = \lambda_2$ does not cross walls in the range $n(1 - |\delta|) \leq K$ (at least if n is large enough). Thus when $n(\delta_1 - \delta_2) \to +\infty$, $|b_2|$ tends to 0. The other case is when $(1 - \delta_1) \to 0$, because we are not sure a priori that the function b tends to 1. But this becomes true if $n(1 - \delta_1) \to +\infty$. Now the proof of the lemma is straightforward. □

By the preceding lemma there exists a constant $K' > 0$ such that if $(n+2)(1-\delta_1) \geq K'$ and $(n+2)(\delta_1 - \delta_2) \geq K'$, then $J(n,\lambda)$ is comparable to

$$\frac{1}{h^{n+2}(s)} \int_U h^{n+2}(i\theta + s) e^{-i\langle \lambda + \lambda_1 + \lambda_2, \theta \rangle} d\theta.$$

We denote by $I(n,\lambda)$ the integral in the last expression. We compute it by developing $h^{n+2}(i\theta + s)$ and using that the integral of $e^{i\langle \mu, \theta \rangle}$ is null whenever μ is a non zero weight. We get, if $|U|$ denotes the Lebesgue measure of U,

$$I(n,\lambda) = |U| \sum \frac{(n+2)!}{n_1! n_2! \dots n_6!},$$

where the sum is over the family of integers $(n_1, \dots, n_6)$ such that $n_1 + \dots + n_6 = n+2$, $n_1 - n_2 + n_5 - n_6 = x_1 + 1$ and $n_3 - n_4 - n_5 + n_6 = x_2 + 1$. In particular we can choose $n_1 = x_1 + 1 - d$, $n_3 = x_2 + 1 + d$, $n_5 = d$, $n_2 = n_4 = n_6 = 0$, with $d = n - x_1 - x_2$. Thus, by Stirling's formula, we get

$$\begin{aligned}
I(n,\lambda) &\geq c_1 \frac{(n+2)^{n+2}}{x_1^{x_1+1-d} x_2^{x_2+1+d}} \frac{1}{\sqrt{x_2}} \\
&\geq c_2 n^d \left(\frac{n+2}{x_1}\right)^{x_1+1-d} \left(\frac{n+2}{x_2}\right)^{x_2+1+d} \frac{1}{\sqrt{n(1-\delta_1)}} \\
&\geq c_3 n^d \frac{1}{\delta_1^{x_1+1-d}} \frac{1}{(1-\delta_1)^{x_2+1+d}} \frac{1}{\sqrt{n(1-\delta_1)}},
\end{aligned}$$

where c_1, c_2 and c_3 are strictly positive constants. The passage from the second to the third line is justified by the inequality $\frac{(n+2)(1-\delta_1)}{x_2} \geq 1$. On the other side, with Lemma 4.3.2 we get

$$h(s)^{n+2} e^{-\langle \lambda + \lambda_1 + \lambda_2, s \rangle} \asymp \left(\frac{\delta_1}{1-\delta_1}\right)^{x_2+1+d} \left(1 + \frac{1-\delta_1}{\delta_1}\right)^{n+2} \frac{1}{(1-|\delta|)^{(n+2)(1-|\delta|)}}.$$

Then

$$h(s)^{n+2} e^{-\langle \lambda + \lambda_1 + \lambda_2, s \rangle} \asymp \left(\frac{\delta_1}{1-\delta_1}\right)^{x_2+1+d} \frac{1}{\delta_1^{n+2}} n^d.$$

Thus we have proved the lower bound when $(n+2)(1-\delta_1) \geq K'$ (and λ is away from the walls).

Combinatorial proof

We have just seen above that

$$(h(s)e^{-\langle \delta, s \rangle})^n \frac{1}{\sqrt{n(1-\delta_1)}} \asymp C_{x_1+1-d}^{n+2-d}\, n^d,$$

for x and n such that $(n+2)(1-|\delta|) \le K$. Now observe that in this range

$$C_{x_1+1-d}^{n+2-d} \asymp \frac{n}{x_2+1} C_{x_1-d}^{n-d},$$

and $q_{t_\lambda} \asymp q^{2n}$. Thus we are lead to prove the estimate of Theorem 4.3.2. In fact it is more convenient to prove the corresponding result for the radial random walk. If $\overline{p}$ denotes its transition kernel, then by definition $\overline{p}^n(0,\lambda) = p^n(0,x)N_\lambda$ for all $n \in \mathbb{N}$, all $\lambda \in P^+$, and all $x \in V_\lambda(0)$. Since N_λ is comparable to q_{t_λ} we have to prove that

$$\overline{p}^n(0,\lambda) \ge c(q\rho)^n C_{x_1-d}^{n-d}\, n^d,$$

for some constant $c > 0$. But for any $\lambda \in P^+$, $q\rho = \overline{p}(\lambda, \lambda+\lambda_1)$, and when $\lambda \in P^{++}$, we have also $q\rho = \overline{p}(\lambda, \lambda+\lambda_2)$. Thus it suffices to prove that, if $n+2-|\lambda| \le K$, then the number of paths from 0 to λ in P^+, is comparable to $C_{x_1-d}^{n-d}\, n^d$. This is elementary, and can be seen as follows. Consider the sequence of increments of the radial random walk up to time n, $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$, with $\epsilon_i \in \{\pm\lambda_1, \pm\lambda_2, \pm(\lambda_1-\lambda_2)\}$ for all $i \le n$. Then choose in arbitrary order, x_1-d terms equal to λ_1, x_2+d terms equal to λ_2, and d terms equal to $\lambda_1-\lambda_2$. The number of ways to do it is comparable to $C_{x_1-d}^{n-d}\, n^d$, which proves the lower bound.
In fact we can also prove the upper bound by combinatorial arguments. Indeed, there must be at least x_1-d terms equal to λ_1 in the sequence, and at most x_1+d. Otherwise the random walk could not reach the point λ at time n. Now if λ_1 appears $k \in \{x_1-d, \dots, x_1+d\}$ times, then for the same reason there must be also at least $n-d-k$ terms equal to λ_2. But when k is fixed, the number of sequences satisfying these conditions is bounded (up to a constant) by $C_k^{n-d}\, n^d$. Moreover, since $x_1 \ge \frac{n-d}{2}$ (and $d \le K$), there exists a constant $c > 0$ such that $C_k^{n-d} \le c C_{x_1-d}^{n-d}$, for all $k \in \{x_1-d, \dots, x_1+d\}$. This proves the desired upper bound.

4.3.6 Local Harnack principle and estimate along the walls

Let us assume that the estimate proved until now is valid when $\overline{x}$ is at distance at least D from the walls $\{\alpha_2 = 0\}$ and $\{\alpha_1 - \alpha_2 = 0\}$. From the heat equation satisfied by p, we know that there exists a constant $C > 0$, such that

$$p^n(O,y) \le C p^{n+1}(O,x), \tag{4.13}$$

for all neighbors x and y. Let now $x \in \mathcal{X}$ be such that $\overline{x}$ is at distance less than D of the wall $\{\alpha_2 = 0\}$ for instance. By repeated applications of (4.13) we see that there exist vertices y_1 and y_2 such that $\overline{y_1} = \overline{x} + D(\lambda_2 - \lambda_1)$, $\overline{y_2} = \overline{x} + D\lambda_2$, and

$$c p^{n-D}(0,y_1) \le p^n(0,x) \le C p^{n+D}(0,y_2),$$

where $c > 0$ and $C > 0$ are other constants. Therefore, we only need to show that our upper estimate of $p^{n+D}(0,y_2)$ is comparable to our lower estimate of $p^{n-D}(0,y_1)$. This yields to prove that $e^{n[\phi(\delta_{y_2})-\phi(\delta_{y_1})]}$ is bounded, where $\delta_{y_i} = \frac{\overline{y_i}+\lambda_1+\lambda_2}{n+2}$. But by an elementary calculus, we see that

$$\nabla\phi(\delta) = -s.$$

Hence

$$\langle \nabla\phi(\delta_{y_1}), \delta_{y_2} - \delta_{y_1}\rangle \leq 0.$$

This implies well that $e^{n[\phi(\delta_{y_2})-\phi(\delta_{y_1})]}$ is bounded. This proves that our estimate extend near the walls. The only missing part now is to see that $q^n(x)$ and $p^n(0,x)$ are comparable when $|x| \leq \frac{n}{2}$. This results also from (4.13). Indeed it implies that

$$p^n(0,x) \leq q^n(x) \leq Cp^{n+3}(0,x),$$

and our estimates show that p^{n+3} is comparable to p^n when $|x| \leq \frac{n}{2}$.

The proof of the theorems 4.3.1 and 4.3.2 is now finished. The extension of (4.6) when $|x| = n$ is straightforward.

Remark 4.3.3 For the rank 2 case, this proof may in fact be applied for any isotropic nearest neighbor random walk. Let us detail. Such random walk has transition density given by $p(x,y) = p_i$ if $y \in V_{\lambda_i}(x)$, for $i = 1,2$, and $p(x,y) = 0$ if x and y are not neighbors. Now in rank 2, $q_{t_{\lambda_1}} = q_{t_{\lambda_2}}$ and $N_{\lambda_1} = N_{\lambda_2}$. Thus we have the formula similar to (4.7)

$$p^n(0,x) = C\rho^n q_{t_\lambda}^{-\frac{1}{2}} \int_U h^n(i\theta)e^{-i\langle\theta,\lambda+\lambda_1+\lambda_2\rangle}\Delta(i\theta)b(i\theta)d\theta,$$

but with $\rho^{-1} = q_{t_{\lambda_1}}^{-\frac{1}{2}} N_{\lambda_1}$ and $h = p_1 \sum_{\lambda\in W_0\lambda_1} e^\lambda + p_2 \sum_{\lambda\in W_0\lambda_2} e^\lambda$. In particular observe that the spectral radius $\tilde{\rho} := \rho h(0)$ is the same for all these random walks. Now remark that for some constants $c, c' > 0$, we have

$$h + c + cc'^3 = c(1 + c'e^{\lambda_1})(1 + c'e^{\lambda_2-\lambda_1})(1 + c'e^{-\lambda_2}).$$

Namely $c' = p_2/p_1$ and $c = p_1^2/p_2$. So all the preceding proof can be applied, and Theorem 4.3.1 can in fact be deduced for all the isotropic nearest neighbor random walks.

4.4 Heat kernel estimate for general buildings of type $\tilde{A}_r$

Given $x \in V_\lambda(0)$ and $n \geq 0$, we set $\delta = \frac{\lambda+\sum_{i=1}^r \lambda_i}{n+r}$, and for $i \leq r$, let $\delta_i := \langle \alpha_i, \delta\rangle$. We define again ϕ by

$$\phi(\delta) = \min\{u \in \overline{\mathfrak{a}_+} \mid \log h(u) - \langle u, \delta\rangle\}.$$

We have the following result

Theorem 4.4.1 *There exists a constant $K > 0$, such that the following estimate holds uniformly in the set $\{|x| \leq n - K\}$*

$$p^n(0,x) \asymp \frac{1}{n^{|R^+|}} \rho^n e^{n\phi(\delta)} F_0(\overline{x}) \frac{1}{\sqrt{n^r \prod_{\alpha \in R^+}(1 - \langle \alpha, \delta \rangle)}}. \tag{4.14}$$

Moreover, the upper estimate holds in the whole domain $\{|x| < n\}$.

Proof : The proof follows exactly the same lines as in rank 2. After elementary computations we get

$$p^n(0,x) = C\rho^n q_{t_\lambda}^{-\frac{1}{2}} \int_U h^n(i\theta) e^{-\left\langle i\theta, \lambda + \sum_{i=1}^r \lambda_i \right\rangle} \Delta(i\theta) b(i\theta) d\theta.$$

The next result is the analogue of Lemma 4.3.1

Lemma 4.4.1 *The following formula holds*

$$\pi(\partial)\left[h^{n+|R^+|}\right] = (n + |R^+|) \dots (n+1) r_n(h) h^n \Delta,$$

where r_n is a polynomial of the form

$$r_n(h) = \sum_{k=r}^{|R^+|} c_k (h+2)^{k-r} \frac{h^{|R^+|-k}}{(n+1)\dots(n+|R^+|-k)},$$

with constants $c_k \in \mathbb{R}$.

Proof : Let us first show that

$$h + 2 = \prod_{\lambda \in W_0 \lambda_1} (1 + e^{\lambda}) = \prod_{i=1}^{r+1} (1 + e^{\lambda_i - \lambda_{i-1}}), \tag{4.15}$$

with the convention $\lambda_{-1} = \lambda_{r+1} = 0$. We prove it by using a well known symbolic description of the fundamental weights and of their conjugates by W_0. We associate to λ_1 the symbol x_1, to λ_2 the symbol $x_1 + x_2$, and so on until λ_r to which we associate the symbol $x_1 + \dots + x_r$, with the rule $x_1 + \dots + x_{r+1} = 0$. For instance $x_2 + \dots + x_{r+1}$ represents the weight $-\lambda_1$. Then we have a nice description of the conjugates of a fundamental weight

$$W_0 \lambda_k = \{x_{i_1} + \dots + x_{i_k} \mid i_i \neq i_2 \dots \neq i_k\},$$

for all $k \leq r$. With this notation it is now elementary to see that

$$h + 2 = \prod_{i=1}^{r} (1 + e^{x_i}),$$

which gives (4.15). Next, for any subset I of R^+, we define π^I on P^+ by

$$\pi^I(\lambda) = \prod_{\alpha \in I} \langle \alpha^\vee, \lambda \rangle .$$

We have

$$\pi(\partial)\left[h^{n+|R^+|}\right]=\sum_{k=1}^{|R^+|}(n+|R^+|)\dots(n+|R^+|-k+1)h^{n+|R^+|-k}f_k,$$

where

$$f_k=\sum_{I_1\cup I_2\cup\dots\cup I_k=R^+}\left[\pi^{I_1}(\partial)(h+2)\right]\dots\left[\pi^{I_k}(\partial)(h+2)\right],$$

for all $k\leq|R^+|$. The polynomials f_k are skew-invariant. Thus they are divisible by Δ. Moreover, f_k is of degree less or equal to k. It implies that $f_k=0$ when $k<r$, since Δ is of degree r. Thus we may assume $k\geq r$. Now we observe that there is only r roots α in R^+ such that $\langle\alpha,\lambda_1\rangle\neq 0$. The same holds for all the conjugates of λ_1. Therefore, by (4.15), f_k is divisible by all the factors $(1+e^{w\lambda_1})^{k-r}$. Hence, it is also divisible by $(h+2)^{k-r}$. Since h is W_0-invariant, we obtain that f_k is proportional to $(h+2)^{k-r}\Delta$. This concludes the proof of the lemma. □

For the rest of the proof we need to divide $\overline{\mathfrak{a}_+}$ in a few parts. If $\{i_1,\dots,i_r\}=\{1,\dots,r\}$, we set

$$\Lambda(i_1,\dots,i_r):=\{s\in\overline{\mathfrak{a}_+}\mid\langle\lambda_{i_1},s\rangle\ \geq\dots\geq\ \langle\lambda_{i_r},s\rangle\}.$$

In fact only a few of these sets are enough to cover $\overline{\mathfrak{a}_+}$

Lemma 4.4.2 *The set $\Lambda(i_1,\dots,i_r)$ has a non empty intersection with $\mathfrak{a}_+$ if, and only if, for all $2\leq j\leq r$, there exists $k<j$, such that $i_j=i_k\pm 1$.*

Proof : Let $s=s_1\alpha_1+\dots+s_r\alpha_r$ be the decomposition of $s\in\mathfrak{a}_+$ in the basis of the simple roots. Assume that the hypothesis on $i_1,\dots,i_r$ of the lemma does not hold. It means that for some i, we have either $\langle\lambda_i,s\rangle\geq\langle\lambda_{i+2},s\rangle\geq\langle\lambda_{i+1},s\rangle$, or $\langle\lambda_{i+2},s\rangle\geq\langle\lambda_i,s\rangle\geq\langle\lambda_{i+1},s\rangle$. Assume that we are in the first case (the second is similar). Then $s_i\geq s_{i+2}\geq s_{i+1}$. But on the other hand, since $s\in\mathfrak{a}_+$, $\left\langle\alpha_{i+1}^\vee,s\right\rangle>0$. This is absurd because $\left\langle\alpha_{i+1}^\vee,s\right\rangle=s_{i+1}-\frac{1}{2}(s_i+s_{i+2})$. □

Now for the same reason than in rank 2 the equation $\nabla h(s)=\delta h(s)$ has a unique solution in $\overline{\mathfrak{a}_+}$. In the sequel we will assume that it lies in $\Lambda(1,\dots,r)$. The proof works the same in the other cases.

Lemma 4.4.3 *1. For all $1\leq i\leq r$,*

$$e^{\langle\lambda_{i+1}-\lambda_i,s\rangle}\asymp(1-\langle\alpha_1+\dots+\alpha_i,\delta\rangle).$$

2. For all $2\leq i\leq r$, when $\langle\lambda_i-\lambda_{i-1},s\rangle\to 0$,

$$\langle\lambda_i-\lambda_{i-1},s\rangle\asymp\delta_i-\delta_{i-1}.$$

Proof : Let us prove the first claim by induction on $i \le r$. The equation $\langle \alpha_1, \nabla h(s)\rangle = \delta_1 h(s)$ may be rewritten as

$$\sum_{\mu} \sinh \langle \lambda_1 + \mu, s\rangle = \delta_1 (\sum_{\mu} \cosh \langle \lambda_1 + \mu, s\rangle + e^{\langle \lambda_2, s\rangle} + \sum_{\nu} e^{\langle \nu, s\rangle}),$$

where the last sum is over weights ν such that $\langle \nu, s\rangle \le \langle \lambda_2, s\rangle$. Multiplying the left and right members of the last equality by $e^{-\langle \lambda_1, s\rangle}$ gives immediately $e^{\langle \lambda_2 - \lambda_1, s\rangle} \asymp 1 - \delta_1$. Let now $i \le r$. We write

$$\langle \alpha_1 + \cdots + \alpha_i, \nabla h(s)\rangle = \langle \alpha_1 + \cdots + \alpha_i, \delta\rangle \, h(s).$$

The exponential $e^{\lambda_1 + \lambda_{i+1} - \lambda_i}$ appears in the right member of the last equality, whereas it does not in the left member. Then we conclude by the same argument as before. The last statement is proved in a similar way, by using the equations $\langle \alpha_{i+1} - \alpha_i, \nabla h(s)\rangle = (\delta_{i+1} - \delta_i) h(s)$. This concludes the proof of the lemma. $\square$

The end of the proof of Theorem 4.4.1 is now completely similar to the rank 2 case, if one avoids Section 4.3.5. Let us just notice that the quadratic form appearing in Lemma 4.3.3 is equal in general to

$$q_\delta(\theta) = \sum_{i=1}^{r} e^{\langle \lambda_{i+1} - \lambda_i, s\rangle} \langle \lambda_{i+1} - \lambda_i, \theta\rangle^2 .$$

We leave the other details of the proof to the reader. $\square$

4.5 Green's function estimate

4.5.1 statement of the result

The Green's function is defined for $x, y \in \mathcal{X}$ by

$$G(x, y|z) = \sum_{n \ge |x|} p^n(x, y) z^n,$$

for all $z \in \mathbb{C}$ such that $|z| \le \frac{1}{\tilde{\rho}}$. We set

$$G(x, z) := G(0, x|z).$$

We will give a sharp estimate of this function when z is real positive. As usual we always use the implicit notation $x \in V_l a(0)$ relating x and λ.

Theorem 4.5.1 *1. Let $z \in (0, \tilde{\rho}^{-1})$. Then*

$$G(x, z) \asymp \frac{1}{|\lambda|^{|R^+| + \frac{r-1}{2}}} e^{-\langle \lambda, s_0\rangle} F_0(\lambda),$$

where $s_0 \in \overline{\mathfrak{a}_+}$ is uniquely determined by the conditions : $h(s_0) = (\rho z)^{-1}$ and $\nabla h(s_0)$ is proportional to λ.

2. We have

$$G(x, \tilde{\rho}^{-1}) \asymp \frac{1}{|\lambda|^{2|R^+| + r - 2}} F_0(\lambda).$$

4.5.2 Proof

The case $z < \tilde{\rho}^{-1}$

First we need some preliminary results. We set $g = \nabla \log h$, and for any $\delta \in \overline{\mathfrak{a}_+}$, we define $s = s(\delta)$ as the unique point in $\overline{\mathfrak{a}_+}$ such that $g(s) = \delta$. We have the following

Lemma 4.5.1 *The function g is locally invertible. Moreover, its differential dg_s at any point $s \in \overline{\mathfrak{a}_+}$ satisfies $\langle u, dg_s(u)\rangle > 0$, for all $u \in \mathfrak{a}$.*

Proof : We compute the differential of g at some point s

$$dg_s(u) = \frac{1}{h^2(s)} \sum_{\lambda,\lambda'} [\frac{\langle \lambda, u\rangle}{2}\lambda + \frac{\langle \lambda', u\rangle}{2}\lambda' - \langle \lambda, u\rangle \lambda' - \langle \lambda', u\rangle \lambda] e^{\langle \lambda+\lambda', s\rangle}.$$

Thus

$$\langle u, dg_s(u)\rangle = \frac{1}{2h^2(s)} \sum_{\lambda,\lambda'} [\langle \lambda, u\rangle - \langle \lambda', u\rangle]^2 e^{\langle \lambda+\lambda', s\rangle} > 0,$$

for all $u \in \mathfrak{a}$. In particular dg_s is invertible at each point s. We conclude by using the local inversion theorem. $\square$

For $t > |\lambda|$ we set $\delta_t = \frac{\lambda}{t}$, and $s_t = g^{-1}(\delta_t)$. Now we define the function Ψ in $(|\lambda|, \infty)$ by

$$\Psi(t) = t[\log h(s_t) - \langle \delta_t, s_t\rangle + \log(\rho z)].$$

We have

$$\Psi'(t) = \log h(s_t) + \log(\rho z),$$

and

$$\Psi''(t) = -\left\langle \delta_t, dg_{\delta_t}^{-1}(\frac{\delta_t}{t})\right\rangle.$$

In particular, by Lemma 4.5.1, $\Psi''(t) < 0$ for all $t > |\lambda|$. Thus Ψ is strictly concave, and attains its maximum at a unique point t_0, which satisfies the equation $h(s_{t_0}) = (\rho z)^{-1}$. For simplify we set $s_0 := s_{t_0}$ and $\delta_0 = \delta_{t_0}$. Observe that they depend only on $\frac{\overline{x}}{|x|}$. We have

Lemma 4.5.2 *There exist constants $c > 0$ and $C > 0$ such that for all $x \in \mathcal{X}$,*

$$c \le |s_0| \le C \qquad \textit{and} \qquad c \le |\delta_0| \le 1 - c.$$

Proof : The proof is straightforward. First $h(s_0) = (\rho z)^{-1}$. Moreover h is continuous, $h(0) < (\rho z)^{-1}$, and $h(s) \to \infty$, when $|s| \to \infty$. Eventually $s \to 0$ when $|\delta| \to 0$, and $|s| \to \infty$ when $|\delta| \to 1$. $\square$

In the sequel it will be convenient to introduce also the function Φ defined for any $|\delta| < 1$ by

$$\Phi(\delta) = \log h(s) - \langle \delta, s\rangle + \log(\rho z).$$

We have

$$\nabla\Phi(\delta) = -s, \tag{4.16}$$

and for all $u \in \mathfrak{a}$,

$$d^2\Phi_\delta(u) = -\left\langle u, dg_\delta^{-1}(u)\right\rangle, \tag{4.17}$$

where $d^2\Phi_\delta$ is the second order differential of Φ at the point δ. Writing the Taylor development of Φ at order 2, we get

$$\Phi(\delta) = -\langle\delta, s_0\rangle - \left\langle \delta-\delta_0, dg_{\delta_0}^{-1}(\delta-\delta_0)\right\rangle + \mathcal{O}(|\delta-\delta_0|^2).$$

Thus there exists $\epsilon > 0$, $c > 0$ and $C > 0$ such that

$$-C|\delta-\delta_0|^2 \le \Phi(\delta) + \langle\delta, s_0\rangle \le -c|\delta-\delta_0|^2, \tag{4.18}$$

for all δ such that $|\delta-\delta_0| \le \epsilon$. Taking smaller ϵ if necessary, we can also assume that there exists a constant $c > 0$ such that for δ in the preceding range, $c \le |\delta| \le 1-c$. We can now prove

Lemma 4.5.3 *We have the estimate*

$$\sum_{|\delta_n-\delta_0|\le\epsilon} p^n(0,x)z^n \asymp \frac{1}{|\lambda|^{|R^+|+\frac{r-1}{2}}} e^{-\langle\lambda,s_0\rangle} F_0(\lambda).$$

Proof : First by Theorem 4.4.1, we see that for all n such that $|\delta_n-\delta_0| \le \epsilon$,

$$p^n(0,x)z^n \asymp \frac{1}{|\lambda|^{|R^+|+\frac{r}{2}}} e^{\Psi(n)} F_0(\lambda).$$

But $\Psi(n) = n\Phi(\delta_n)$. Thus by (4.18)

$$e^{-\langle\lambda,s_0\rangle - Cn|\delta-\delta_0|^2} \le e^{\Psi(n)} \le e^{-\langle\lambda,s_0\rangle - cn|\delta-\delta_0|^2},$$

for all n such that $|\delta_n-\delta_0| \le \epsilon$. Now we write

$$\sum_{|\delta_n-\delta_0|\le\epsilon} e^{\Psi(n)} = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{\frac{\epsilon}{2^{p+1}}\le|\delta_n-\delta_0|\le\frac{\epsilon}{2^p}} e^{\Psi(n)}.$$

Next for all $p \ge 0$,

$$\left|\left\{n \mid \frac{\epsilon}{2^{p+1}} \le |\delta_n-\delta_0| \le \frac{\epsilon}{2^p}\right\}\right| \asymp \frac{\epsilon|\lambda|}{2^p}.$$

Thus

$$\sum_{|\delta_n-\delta_0|\le\epsilon} e^{\Psi(n)} \le \mathrm{const}\cdot|\lambda|^{\frac{1}{2}} e^{-\langle\lambda,s_0\rangle} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{|\lambda|^{\frac{1}{2}}}{2^p} e^{-c|\lambda|/2^{2p}}.$$

Moreover it is elementary to see that the last sum is bounded. Therefore we get as expected

$$\sum_{|\delta_n-\delta_0|\le\epsilon} e^{\Psi(n)} \le C|\lambda|^{\frac{1}{2}} e^{-\langle\lambda,s_0\rangle}.$$

for some constant $C>0$. By the same argument we can prove the lower estimate

$$\sum_{|\delta_n-\delta_0|\le\epsilon} e^{\Psi(n)} \ge c|\lambda|^{\frac{1}{2}} e^{-\langle\lambda,s_0\rangle},$$

for some constant $c>0$. This concludes the proof of the lemma. $\square$

The proof is now almost finished. Since Ψ is concave, there exists $c>0$ such that

$$\Psi(n) \le -\langle\lambda, s_0\rangle - cn,$$

for all n such that $|\delta_n-\delta_0|\ge\epsilon$. Thus

$$\sum_{|\delta_n-\delta_0|\ge\epsilon,\ |\delta_n|\ge\epsilon} e^{\Psi(n)} \le C|\lambda| e^{-\langle\lambda,s_0\rangle - c|\lambda|}. \tag{4.19}$$

In fact in the preceding sum we must assume that $n>|x|$, because the estimate of $p^{|x|}(0,x)$ is not contained in Theorem 4.4.1. But by the Harnack principle (given by the heat equation), there exists a constant $C>0$ such that for all x,

$$p^{|x|}(0,x) \le Cp^{|x|+2}(0,x),$$

which gives also a control of the term $p^{|x|}(0,x)$. Taking now smaller ϵ if necessary, we can assume that there exists $c>0$ such that,

$$\rho z h(s) \le 1-c,$$

when $|\delta|\le\epsilon$. Then, by Theorem 4.4.1,

$$\sum_{|\delta_n|\le\epsilon} e^{\Psi(n)} \le C\sum_{n\ge\frac{|\lambda|}{\epsilon}} (1-c)^n \le C(1-c)^{\frac{|\lambda|}{\epsilon}}.$$

Taking again smaller ϵ if necessary, we get

$$\sum_{|\delta_n|\le\epsilon} e^{\Psi(n)} \le Ce^{-\langle\lambda,s_0\rangle - c|\lambda|}. \tag{4.20}$$

Together with Lemma 4.5.3, and (4.19), this proves Theorem 4.5.1 in the case $z<\tilde{\rho}^{-1}$.

The case $z = \tilde{\rho}^{-1}$

First by Lemma 4.5.1 dg_0 is invertible. Thus $|s| \asymp |\delta|$ near 0. It implies with (4.16) that there exists a constant $c > 0$ such that

$$\Phi(\delta) \leq -c|\delta|^2,$$

for all $|\delta| < 1$. Therefore for all $\epsilon > 0$, we get a constant $c' > 0$ such that

$$\sum_{|\delta_n| \geq \epsilon} p^n(0,x)\tilde{\rho}^{-n} \leq e^{-c'|x|} F_0(\lambda).$$

Moreover, by (4.16) and (4.17), $\nabla\Phi(0) = 0$ and $d^2\Phi_0$ is definite negative. Hence we get

$$\Phi(\delta) \asymp -|\delta|^2,$$

near 0. It follows that

$$\sum_{|\delta_n| \leq \epsilon} p^n(0,x)\tilde{\rho}^{-n} \asymp F_0(\lambda) \int_{\frac{|x|}{\epsilon}}^{+\infty} \frac{1}{t^m} e^{-\frac{|x|^2}{t}} dt,$$

where $m = |R^+| + \frac{r}{2}$. Next we do the change of variable $t \to \frac{|x|^2}{t}$ and we find the desired estimate. This concludes the proof of Theorem 4.5.1.

Chapitre 5

Convergence vers le mouvement brownien de la chambre de Weyl

Ce chapitre reprend l'article [Sch3].

Résumé : *Dans cet article nous exhibons une chaîne de Markov sur un immeuble affine, dont la partie radiale convenablement renormalisée converge vers le mouvement brownien de la chambre de Weyl (pour le type A). C'est une nouvelle discrétisation de ce processus, alternative à celle de Biane [Bi2]. Les ingrédients principaux de la preuve sont une formule combinatoire sur l'immeuble, ainsi que l'estimation du noyau de la chaleur récemment obtenue dans [A–Sch–Tro1]. Par ailleurs notre résultat met en évidence une correspondance au niveau probabiliste entre les espaces symétriques riemanniens de type non compact G/K [A–B–J], la théorie de Heckman-Opdam [Sch1], et les immeubles affines. Celle-ci avait déjà été observée en rang 1 par Bougerol et Jeulin [B–J2].*

Abstract : *In this paper we study a random walk on a building, whose radial part, when suitably normalized, converges to the Brownian motion of the Weyl chamber (for the type A). This gives a new discrete approximation of this process, which is different from the one of Biane [Bi2]. The main ingredients of the proof are a combinatorial formula on the building and the estimate of the transition density proved in [A–Sch–Tro1]. Moreover our result extends in higher rank the correspondence at the probabilistic level between Riemannian symmetric spaces of the noncompact type and their discrete counterpart, which had been previously obtained by Bougerol and Jeulin in rank one [B–J1].*

5.1 Introduction

Le mouvement brownien de la chambre de Weyl, ou MB intrinsèque, considéré par Biane dans [Bi1] a connu assez récemment un intérêt grandissant du fait de son apparition dans de nombreuses branches des probabilités. Par exemple en dimension 1 c'est le Bessel-3 dont on connaît déjà bien l'importance. Mais plus généralement il apparaît entre autres en théorie des matrices aléatoires, des systèmes de particules, des files d'attente, des tableaux de Young, en percolation orientée (voir par exemple [OC] pour un panorama général), ou encore dans la théorie des processus sur les espaces symétriques riemanniens [A–B–J], et plus récemment dans la théorie des processus de Dunkl et de Heckman-Opdam (cf [G–Y1] et [Sch1] et les références citées). C'est un processus à valeurs dans une chambre de Weyl $\mathfrak{a}_+$, c'est-à-dire grossièrement un cône de $\mathbb{R}^r$ dont les bords sont délimités par certains hyperplans. Une façon élémentaire de le définir est de considérer le mouvement brownien tué au bord de la chambre de Weyl, et conditionné à ne jamais toucher le bord (cf partie préliminaire pour plus de précisions).

Une question de base est de trouver une version discrète naturelle de ce processus, c'est-à-dire une marche aléatoire qui, convenablement renormalisée, converge vers ce processus. Un exemple de telle marche a été introduit et étudié par Biane [Bi2] [Bi3] [Bi4], puis Biane, Bougerol et O'Connell [Bi–B–OC]. On peut la définir de manière analogue, en considérant la marche aléatoire simple sur le réseau des poids d'un système de racines, tuée au bord de la chambre de Weyl, et conditionnée à ne jamais toucher les bords. Disons simplement que le réseau des poids en question est un réseau dont les vecteurs de base engendrent les directrices du cône $\mathfrak{a}_+$. On peut alors calculer explicitement son noyau de transition, à l'aide notamment du principe de réflexion, et montrer sa convergence vers le MB intrinsèque [Bi–B–OC]. En fait [Bi2] [Bi4] cette marche apparaît aussi naturellement en cristallisant une marche aléatoire quantique sur le dual d'un groupe de Lie compact.

Dans cet article nous étudions une discrétisation alternative du MB intrinsèque, lorsque la chambre de Weyl est associée à un système de racines de type A (cf partie suivante). Dans ce cas le MB intrinsèque s'identifie au processus des valeurs propres d'une matrice hermitienne de trace nulle dont les coefficients sont des mouvements browniens complexes (dit aussi processus GUE). Notre discrétisation est obtenue à partir d'une certaine marche aléatoire au plus proche voisin $(X_n, n \geq 0)$, sur (l'ensemble des sommets d') un immeuble affine de type $\tilde{A}_r$. Pour simplifier disons qu'un immeuble affine est un graphe contenant plusieurs sous-graphes, appelés appartements, isomorphes au réseau des poids. Une fois que l'on s'est fixé un appartement, disons P, et une partie positive P^+, on définit la partie radiale d'un sommet x de l'immeuble, comme sa projection $\overline{x}$ sur P^+ (cf partie suivante). Soit A l'opérateur de transition de $(X_n, n \geq 0)$. Notons F_0 une certaine fonction propre positive de A au bas du spectre (F_0 sera définie précisément dans la suite). Soit $(Y_n, n \geq 0)$ la F_0-marche relativisée au sens de Doob. Soit $(Y_t^N, t \geq 0)$ la suite de F_0-marches radiales renormalisées, définie par $Y_t^N = \frac{\overline{Y_{[Nt]}}}{\sqrt{N}}$, pour tout $N \geq 0$ et tout $t \in \mathbb{R}^+$. Alors le principal résultat de cet article est que la suite de processus $(Y_t^N, t \geq 0)$ converge en loi, dans l'espace des trajectoires, vers le MB intrinsèque, lorsque N tend vers l'infini.

L'idée de ce résultat remonte à l'étude de Bougerol et Jeulin [B–J2], qui le démontrent dans le cas des arbres homogènes, qui sont des immeubles de rang 1. En même temps ils démontrent également un résultat tout à fait analogue sur les espaces symétriques riemanniens de type non compact de rang 1 (en particulier sur tous les espaces hyperboliques réels ou complexes), qui sont des versions continus des arbres homogènes. Ils l'ont ensuite étendu avec Anker à tous les espaces symétriques riemanniens de rang supérieur [A–B–J] [B–J1]. L'auteur l'a également montré dans le cadre général de la théorie de Heckman-Opdam [Sch1]. On voit donc, et c'est là un autre intérêt de notre travail, que le résultat décrit plus haut est universel. Il établit une correspondance au niveau probabiliste entre les espaces symétriques riemanniens de type non compact, ou plus généralement la théorie de Heckman-Opdam, et les immeubles affines (de type $\tilde{A}_r$). Signalons quand même qu'une telle correspondance n'est pas surprenante, puisque les immeubles affines, excepté certains de type $\tilde{A}_2$, sont aussi des (représentations géométriques d') espaces symétriques de type p-adique. En particulier il est bien connu que les théories analytiques ou géométriques (e.g. compactifications) sur ces espaces sont très similaires. Nous renvoyons aussi le lecteur à [Ca–Wo] ou [Par3] pour d'autres résultats probabilistes sur les immeubles (en particulier loi des grands nombres et théorème central limite).

Nous décrivons maintenant le plan de cet article. Dans la partie 5.2 nous rappelons certaines définitions et propriétés importantes des objets étudiés. Dans la partie suivante nous introduisons les F_0-marches aléatoires, et montrons qu'elles apparaissent naturellement comme limites de ponts de longueur N, lorsque N tend vers l'infini. Puis dans la partie 5.4, nous donnons des formules explicites pour les probabilités de transition des parties radiales des marches aléatoires au plus proche voisin. Ceci nous permet dans la partie 5.5, de démontrer le résultat décrit précédemment, lorsque l'on renormalise le point de départ de $(X_n, n \geq 0)$ de façon à converger vers le MB intrinsèque partant d'un point à l'intérieur de la chambre de Weyl. On s'appuie pour cela sur un critère de Ethier et Kurtz [E–K] sur la convergence uniforme des générateurs. Enfin dans la dernière partie nous montrons la convergence vers le MB intrinsèque partant de 0. Ce dernier résultat est beaucoup plus difficile à obtenir, car on ne peut plus appliquer directement le critère de Ethier et Kurtz. On a en plus besoin d'un contrôle de la norme des processus en temps petit. Ceci s'obtient grâce aux estimations du noyau de la chaleur démontrées récemment dans [A–Sch–Tro1]. Cependant ces estimations ne concernent qu'une marche aléatoire bien particulière, dite marche aléatoire simple (excepté pour $r = 2$, où les estimations sont démontrées pour toutes les marches symétriques au plus proche voisin). Notre dernier résultat se restreint donc (sauf pour $r = 2$) à ce cas particulier.

5.2 Préliminaires

Le système de racines : Soit $\mathfrak{a}$ un espace euclidien de dimension r, muni du produit scalaire $< \cdot, \cdot >$. On note $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}} := \mathfrak{a} + i\mathfrak{a}$ sa complexification. Soit $\mathcal{R} \subset \mathfrak{a}$ un *système de racine de type* A_r. On peut le définir (cf e.g. [Bou]) comme l'ensemble des vecteurs $e_i - e_j$, pour $1 \leq i \neq j \leq r+1$, où les e_i, $1 \leq i \leq r+1$, sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^{r+1}$, et où $\mathfrak{a}$ est l'hyperplan $\{< x, e_1 + \cdots + e_{r+1} >= 0\}$. Un sous-ensemble de *racines positives* $\mathcal{R}^+$ est défini ainsi : on choisit d'abord arbitrairement $u \in \mathfrak{a}$ tel que $< u, \alpha >\neq 0$ pour tout $\alpha \in \mathcal{R}$. Puis on pose $\mathcal{R}^+ = \{\alpha \in \mathcal{R} \mid < \alpha, u > > 0\}$. La *chambre de Weyl positive* associée $\mathfrak{a}_+$ est définie par

$$\mathfrak{a}_+ = \{x \in \mathfrak{a} \mid < \alpha, x > > 0, \ \forall \alpha \in \mathcal{R}^+\}.$$

On note $\overline{\mathfrak{a}_+}$ son adhérence, et $\partial\mathfrak{a}_+$ sa frontière. On note W_0 le groupe de Weyl, c'est-à-dire le sous-groupe fini de $\mathcal{O}(\mathfrak{a})$ engendré par les réflexions orthogonales r_α par rapport aux hyperplans orthogonaux aux racines $\alpha \in \mathcal{R}$. On note $\Pi := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ une base (les éléments de Π sont appelés *racines simples*) de $\mathcal{R}^+$, c'est-à-dire un sous-ensemble de $\mathcal{R}^+$ tel que pour tout $\alpha \in \mathcal{R}^+$, il existe des entiers positifs $n_1, \ldots, n_r$ tels que $\alpha = \sum_{i=1}^r n_i \alpha_i$. On note $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ la base duale, i.e. $\forall i \neq j$, $< \alpha_i, \lambda_j >= \delta_{i,j}$. Les éléments de la base duale sont appelés *poids fondamentaux*. Le *réseau des poids* P est par définition le $\mathbb{Z}$-réseau engendré par les poids fondamentaux. On note P^+ le sous-ensemble des poids positifs, i.e. appartenant à $\overline{\mathfrak{a}_+}$, et P^{++} celui des poids positifs réguliers, i.e. appartenant à $\mathfrak{a}_+$. On note $\tilde{W}$ le groupe de Weyl affine étendu (essentiellement engendré par W_0 et les translations par des éléments de P, cf [Bou]). On peut définir (cf [Par1]) une fonction $w \mapsto q_w$ sur $\tilde{W}$ telle que, si t_λ est la translation de vecteur $\lambda \in P$, alors

$$q_{t_\lambda} = q^{\sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} < \alpha, \lambda >}.$$

Si $\lambda \in P^+$, et si $\lambda = \sum_{i=1}^r n_i \lambda_i$, alors sa longueur est définie par $|\lambda| = \sum_{i=1}^r n_i$.

L'immeuble affine : Soit $\mathcal{X}$ l'ensemble des sommets d'un immeuble affine de type $\tilde{A}_r$ et de paramètre q. Plutôt que de donner une définition précise, ce qui serait relativement fastidieux, nous avons choisi de ne présenter ici que quelques propriétés importantes des immeubles utiles à la compréhension de cet article (cf e.g. [Ron] [Ca] ou [Par2] pour plus de détails). Nous rappelons donc qu'un immeuble affine est un complexe simplicial. Les simplexes de dimension 0 sont appelés les *sommets*, et ceux de dimension maximale r sont appelés les *chambres*. Signalons tout de suite pour éviter toute ambiguïté que les chambres de l'immeuble (appelées aussi parfois alcoves), qui sont des simplexes compacts, n'ont rien à voir avec la chambre de Weyl positive, qui est une chambre du système de racines, et en particulier un cône ouvert non borné de $\mathfrak{a}$.

Les simplexes de dimension $r-1$ sont appelés les *faces*. On dit que deux chambres de l'immeuble sont voisines si elles sont distinctes, et ont une face en commun. On appelle galerie toute suite de chambres $(C_1, \ldots, C_n)$ telle que pour tout $i \leq n-1$, C_i et C_{i+1} soient voisines. On appellera n la longueur de la galerie. On appelle aussi distance entre deux chambres, la longueur minimale d'une galerie allant d'une chambre à l'autre. Soit C une chambre et F une de ses faces. Par définition, q est le nombre de chambres voisines de C qui contiennent F. En particulier ce nombre ne dépend ni de C ni de F. Pour $r = 1$ par exemple, $\mathcal{X}$ est un arbre homogène, où chaque sommet a $q + 1$ voisins.

Par définition $\mathcal{X}$ contient plusieurs sous-complexes, appelés appartements, isomorphes au complexe simplicial dont les sommets sont les points de P (cf e.g. [Ron] pour plus de détails). De plus si l'on fixe un sommet O de $\mathcal{X}$ et un appartement P (identifié ici au réseau des poids) contenant O, alors pour tout autre sommet x de $\mathcal{X}$ il existe un unique isomorphisme qui fixe O et qui envoie x sur un sommet $\overline{x}$ de P^+. On appelle $\overline{x}$ la coordonnée ou partie radiale de x (que l'on identifie à un poids positifs). Lorsque $r = 1$ par exemple, P^+ est l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$, et $\overline{x}$ est la distance de x à l'origine. Pour $\lambda \in P^+$, on note $V_\lambda(0)$ l'ensemble des sommets de coordonnée λ, et on l'appelle *sphère de rayon λ centrée en O*. De même, pour tout couple de sommets x et y il existe un unique isomorphisme envoyant x en 0, et y en un sommet de P^+. On note alors $V_\lambda(x)$ l'ensemble des sommets y qui sont envoyés sur $\lambda \in P^+$ par cet isomorphisme. Pour tout $\lambda \in P^+$, $V_\lambda(x)$ est un sous-ensemble fini de $\mathcal{X}$, dont le cardinal N_λ est indépendant de x. Pour $\lambda \in P$, soit $W_{0\lambda}$ le stabilisateur de λ sous l'action de W_0. On a la formule suivante :

$$N_\lambda = \frac{W_0(q^{-1})}{W_{0\lambda}(q^{-1})} q_{t_\lambda},$$

où $V(q^{-1}) = \sum_{w \in V} q_w^{-1}$ pour tout sous-groupe V de W_0. On définit enfin la fonction π sur P par

$$\pi(\lambda) = \prod_{\alpha \in \mathcal{R}^+} < \alpha^\vee, \lambda > .$$

Les polynômes de Macdonald : Les fonctions $\mathbf{c}$ et h sont définies pour $z \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}$ par

$$\mathbf{c}(z) = \prod_{\alpha \in \mathcal{R}^+} \frac{1 - q^{-1} e^{-<\alpha^\vee, z>}}{1 - e^{-<\alpha^\vee, z>}},$$

et

$$h(z) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{\lambda \in W_0 \lambda_i} e^{<\lambda, z>}.$$

On notera aussi $\tilde{h} = \frac{h}{h(0)}$. Les polynômes de Macdonald sont définis (cf par exemple [Ca] ou [Par1]) pour $\lambda \in P^+$ et $z \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}$ par

$$P_\lambda(z) = \frac{q_{t_\lambda}^{-\frac{1}{2}}}{W_0(q^{-1})} \sum_{w \in W_0} \mathbf{c}(w^{-1} z) e^{<w\lambda, z>}. \tag{5.1}$$

On définit également la fonction F_0 sur P^+ par

$$F_0(\lambda) = P_\lambda(0).$$

On rappelle l'estimation dans P^+ (cf [A–Sch–Tro1]) :

$$F_0(\lambda) \asymp q_{t_\lambda}^{-\frac{1}{2}} \prod_{\alpha\in\mathcal{R}^+} (1+ <\alpha, \lambda>), \tag{5.2}$$

et lorsque $<\alpha, \lambda> \to +\infty$ pour tout $\alpha \in \mathcal{R}^+$,

$$F_0(\lambda) \sim q_{t_\lambda}^{-\frac{1}{2}} \pi(\lambda). \tag{5.3}$$

Marche aléatoire symétrique au plus proche voisin : Par définition, c'est une chaîne de Markov $(X_n, n \geq 0)$ sur $\mathcal{X}$, dont les probabilités de transition sont égales à

$$p(x,y) = \begin{cases} p_i & \text{si } y \in V_{\lambda_i}(x), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où les p_i satisfont la condition $\sum_{i=1}^r p_i N_{\lambda_i} = 1$. Soit

$$\tilde{\rho} = \sum_{i=1}^r p_i q_{t_{\lambda_i}}^{\frac{1}{2}} |W_0 \lambda_i|,$$

le *rayon spectral*. La *marche radiale* est par définition la chaîne de Markov $(\overline{X_n}, n \geq 0)$ sur P^+. On notera $\overline{p}$ son noyau de transition. Un cas particulier important qui sera étudié dans cet article est la *marche aléatoire simple*. Ses probabilités de transition sont définies par

$$p_i = \frac{q_{t_{\lambda_i}}^{-\frac{1}{2}}}{\sum_{i=1}^r q_{t_{\lambda_i}}^{-\frac{1}{2}} N_{\lambda_i}}, \tag{5.4}$$

pour tout $i \leq r$. Pour cette marche on dispose d'une formule intégrale relativement simple pour le noyau de transition (cf [A–Sch–Tro1]), ce qui explique d'ailleurs son nom : si

$$U = \{\theta \in \mathfrak{a} \mid \forall w \in W_0,\ \forall i \leq r, \quad | <w\alpha_i, \theta> | \leq \pi\},$$

et si $p^n(0,x)$ est la probabilité, partant de 0, d'arriver au sommet $x \in V_\lambda(0)$ en n pas, alors

$$p^n(0,x) = \text{const} \cdot \tilde{\rho}^n \int_U \tilde{h}^n(i\theta) P_\lambda(i\theta) \frac{d\theta}{|c(i\theta)|^2}. \tag{5.5}$$

Le mouvement brownien de la chambre de Weyl : Ce processus est aussi appelé parfois le mouvement brownien intrinsèque. Il existe de nombreuses définitions et interprétations de ce processus, dont nous ne mentionnerons ici que certaines. Une façon élémentaire de le définir (cf Biane [Bi1], ou Anker, Bougerol et Jeulin [A–B–J]) est de considérer le π-processus au sens de Doob du mouvement brownien standard dans $\mathfrak{a}$ tué au bord de $\mathfrak{a}_+$. En fait, comme l'a noté Biane, π étant l'unique (à une constante multiplicative près) fonction harmonique positive qui s'annule sur $\partial\mathfrak{a}_+$, on peut l'interpréter comme le mouvement brownien standard partant d'un point de $\mathfrak{a}_+$, tué au bord de $\mathfrak{a}_+$, et conditionné à ne jamais toucher les bords de la chambre. C'est donc de ce point de vue une généralisation naturelle du Bessel-3 en dimension plus grande que 1. Pour d'autres propriétés de ce processus qui renforcent cette idée, nous renvoyons à l'article de Biane, Bougerol et O'Connell [Bi–B–OC]. Il y est en particulier démontré qu'il s'obtient par une transformation du mouvement brownien qui généralise celle classique de Pitman $2S-B$ en dimension 1. On peut aussi le définir comme le processus de Dunkl de paramètre 1 (cf [G–Y1]). En particulier c'est un processus de Feller de générateur D (cf [Sch1]) défini pour f régulière et W_0-invariante par

$$Df(x) = \frac{1}{2}\Delta f(x) + < \nabla \log \pi, \nabla f > (x),$$

pour tous $x \in \overline{\mathfrak{a}_+}$. Enfin la loi de ce processus partant de 0 a pour densité (cf [A–B–J])

$$p_t(0,x) = \text{const} \cdot \frac{1}{t^{|\mathcal{R}^+|+\frac{r}{2}}} \pi(x)^2 e^{-\frac{|x|^2}{2t}},$$

pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in \mathfrak{a}_+$.

Remerciements : Ce travail fait partie de ma thèse. Je remercie chaleureusement mes directeurs Jean-Philippe Anker et Philippe Bougerol de m'avoir suggéré d'étudier ce problème.

5.3 La F_0-marche aléatoire

Soit $(X_n, n \geq 0)$ une marche symétrique au plus proche voisin, de noyau de transition p. La fonction F_0 est fonction propre de son opérateur de transition (cf [Par1]) :

$$\sum_{y \in \mathcal{X}} p(x,y) F_0(\overline{y}) = \tilde{\rho} F_0(\overline{x}),$$

pour tout $x \in \mathcal{X}$. La F_0-*marche aléatoire* $(Y_n, n \geq 0)$ est alors la chaîne de Markov sur $\mathcal{X}$ dont le noyau de transition q est défini par

$$q(x,y) = p(x,y) \frac{F_0(\overline{y})}{F_0(\overline{x})} \tilde{\rho}^{-1}.$$

On note $(X_n^{N,0}, n \geq 0)$ le pont de longueur N autour de 0, i.e. la marche aléatoire partant de 0 et conditionnée à revenir en 0 au temps N. La proposition qui suit montre que la F_0-marche peut être vue comme la première moitié d'un lacet de longueur infinie autour de 0. C'est l'analogue d'un résultat sur les espaces symétriques G/K [A–B–J], étendu ensuite à la théorie de Heckman-Opdam [Sch1].

Proposition 5.3.1 *Lorsque $N \to +\infty$, $(X_n^{N,0}, n \geq 0)$ converge en loi vers $(Y_n, n \geq 0)$.*

Preuve : Soit $\mathbb{P}$ la loi de $(X_n, n \geq 0)$ et $\mathcal{F}_n := \sigma(X_k, k \leq n)$ sa filtration naturelle. Soit $\mathbb{P}^{N,0}$ la loi de $(X_n^{N,0}, n \geq 0)$. On a la relation d'absolue continuité suivante :

$$\mathbb{P}^{N,0}_{|\mathcal{F}_n} = \frac{p^{N-n}(0, X_n)}{p^N(0,0)} \mathbb{P}_{|\mathcal{F}_n}, \tag{5.6}$$

pour tout $n \geq 0$. Supposons maintenant pour simplifier un peu, que $(X_n, n \geq 0)$ soit la marche simple. Alors d'après (5.5), pour tout $\lambda \in P^+$ et tout $x \in V_\lambda(0)$,

$$\frac{p^{N-n}(0,x)}{p^N(0,0)} = \tilde{\rho}^{-n} \frac{\int_U \tilde{h}^{N-n}(i\theta) P_\lambda(i\theta) \frac{d\theta}{|c(i\theta)|^2}}{\int_U \tilde{h}^N(i\theta) P_0(i\theta) \frac{d\theta}{|c(i\theta)|^2}}.$$

On effectue dans les deux intégrales précédentes, les changements de variables respectifs $\theta \to \frac{\theta}{\sqrt{N-n}}$ et $\theta \to \frac{\theta}{\sqrt{N}}$. On remarque ensuite que

$$\tilde{h}^N(i\frac{\theta}{\sqrt{N}}) \to e^{-\text{const}\cdot \sum_\lambda <\lambda,\theta>^2},$$

lorsque $N \to +\infty$. De plus $\frac{1}{\mathbf{c}(i\theta)}$ est équivalent (à une constante près) à $\pi(i\theta)$ en 0. On obtient donc la convergence suivante :

$$\frac{p^{N-n}(0,x)}{p^N(0,0)} \to \tilde{\rho}^{-n} \frac{P_\lambda(0)}{P_0(0)},$$

lorsque $N \to +\infty$, ce qui avec la relation (5.6) prouve la proposition pour la marche simple. Dans le cas général, $\tilde{h}$ doit être remplacé par une certaine somme d'exponentielles, mais dont les coefficients ne sont pas nécessairement tous égaux (cf [Par2]). Néanmoins la preuve reste inchangée. ■

5.4 Probabilités de transition de la marche radiale

Dans cette partie nous donnons des formules explicites pour les probabilités de transition d'une marche radiale au plus proche voisin. Elles seront utilisées dans la partie suivante pour démontrer le théorème 5.5.1. Ces formules se ramènent en fait à un calcul combinatoire sur l'immeuble (proposition 5.4.1 ci-dessous), qui peut aussi être intéressant en soi. On peut trouver un résultat similaire dans [Ca–Wo], et dans la thèse de Parkinson [Par2] pour tous les immeubles de rang 2.

Proposition 5.4.1 *Pour tout $\lambda \in P^{++}$, tout sommet $x_\lambda \in V_\lambda(0)$, tout $w \in W_0$ et tout $i \in \{1, \ldots, r\}$,*

$$|V_{\lambda + w\lambda_i}(0) \cap V_{\lambda_i}(x_\lambda)| = q_{t_{\lambda_i}}^{\frac{1}{2}} q_{t_{w\lambda_i}}^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve : Fixons $\lambda \in P^{++}$ et $x_\lambda \in V_\lambda(0)$. Soit w' de longueur maximale tel que $w'\lambda_i = w\lambda_i$. Comme la formule recherchée ne change pas quand on remplace w par w', on peut supposer que $w = w'$. Maintenant par définition de q, on sait que chaque fois que l'on fixe une face F de dimension $r-1$ contenant x_λ, il y a $q+1$ chambres qui contiennent F. Autrement dit à chaque fois que l'on fixe une chambre C et une de ses faces F, il y a exactement q sommets x de l'immeuble, tels que (F,x) définisse une chambre différente de C. Notons C_+ et C_- les chambres (dans $\overline{\mathfrak{a}_+}$) contenant λ et tous les poids $\lambda+\lambda_i$, respectivement $\lambda-\lambda_i$, pour $i=1,\dots,r$. On notera aussi $C_w := wC_+$. On sait (cf [Par2]) que pour tout i,

$$\left|V_{\lambda-\lambda_i}(0) \cap V_{\lambda_j}(x_\lambda)\right| = 1,$$

si $-\lambda_i \in W_0\lambda_j$. Autrement dit il existe une unique chambre dans l'immeuble, que l'on notera aussi C_-, qui contienne x_λ et dont les sommets aient pour coordonnées $\lambda, \lambda-\lambda_1, \dots, \lambda-\lambda_r$. De même pour tout sommet x de l'immeuble, il existe une unique chambre C_x de l'immeuble contenant x, et à distance minimale de C_-. On en déduit que

$$|V_{\lambda+w\lambda_i}(0) \cap V_{\lambda_i}(x_\lambda)| = q^{l_w},$$

où l_w est la longueur d'une galerie de longueur minimale allant de C_- à (une chambre dont la partie radiale est) C_w. En effet d'une part, d'après la discussion précédente, il existe q^{l_w} telles galeries, et pour chacune d'entre elle, il existe $x \in V_{\lambda+w\lambda_i}(0) \cap V_{\lambda_i}(x_\lambda)$ tel que C_x soit la dernière chambre de la galerie. D'autre part deux galeries distinctes peuvent avoir les mêmes premières chambres, mais à partir d'un moment elles n'ont plus aucune chambre en commun (c'est immédiat par récurrence sur la longueur de la galerie), et elles aboutissent donc nécessairement à deux points x et x' distincts. Il est maintenant bien connu que, si l'on note $l(w)$ la longueur de w, alors

$$l_w = |W_0| - l(w) = \left|\mathcal{R}^+ \cap w^{-1}\mathcal{R}^+\right|.$$

De plus, vu le choix de w que l'on a fait, on a

$$\left|\mathcal{R}^+ \cap w^{-1}\mathcal{R}^+\right| = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+ \cap w^{-1}\mathcal{R}^+} <\alpha, \lambda_i>.$$

En effet, pour tout $\alpha \in \mathcal{R}^+$, $<\alpha,\lambda_i>$ est égal à 0 ou 1. Mais s'il existe $\alpha \in \mathcal{R}^+ \cap w^{-1}\mathcal{R}^+$ tel que $<\alpha,\lambda_i>=0$, alors déjà en décomposant α dans la base Π, on s'aperçoit que l'on peut supposer $\alpha \in \Pi$. Par ailleurs $r_\alpha\lambda_i = \lambda_i$, donc $wr_\alpha\lambda_i = w\lambda_i$. Enfin puisque $\alpha \in \Pi$, r_α établit une bijection entre $\mathcal{R}^+ \cap w^{-1}\mathcal{R}^+ \setminus \{\alpha\}$ et $\mathcal{R}^+ \cap (wr_\alpha)^{-1}\mathcal{R}^+$. Donc $l(wr_\alpha) = l(w)+1$, et l'on a une absurdité. Pour conclure il suffit de remarquer la formule élémentaire

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+ \cap w^{-1}\mathcal{R}^+} <\alpha,\lambda_i> = \frac{1}{2}\left\{\sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} <\alpha,\lambda_i> + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} <\alpha, w\lambda_i>\right\},$$

ce qui conclut la preuve de la proposition. ■

On peut déduire de la proposition précédente les probabilités de transition d'une marche aléatoire radiale :

$$\overline{p}(\lambda, \lambda + w\lambda_i) = q_{t_{\lambda_i}}^{\frac{1}{2}} q_{t_{w\lambda_i}}^{\frac{1}{2}} p_i,$$

pour tout $\lambda \in P^{++}$. En particulier pour la marche aléatoire simple, elles sont données d'après (5.4) par

$$\overline{p}(\lambda, \lambda + w\lambda_i) = \frac{q_{t_{w\lambda_i}}^{\frac{1}{2}}}{\sum_{i=1}^{r} q_{t_{\lambda_i}}^{-\frac{1}{2}} N_{\lambda_i}}.$$

5.5 Convergence vers le MB intrinsèque partant d'un point intérieur

Soit $x \in \mathcal{X}$ et soit $(X_n^x, n \geq 0)$ une marche aléatoire symétrique au plus proche voisin partant de x. Notons $(Y_n^x, n \geq 0)$ la F_0-marche aléatoire partant de x.

Si $a \in \mathfrak{a}_+$, on notera $[a]$ un des poids (peu importe lequel) de P^+ qui est à distance minimale de a. Pour $N \in \mathbb{N}$, on note $(Y_t^{N,a}, t \geq 0)$ la F_0-marche radiale renormalisée partant de a. Elle est définie pour $t \in \mathbb{R}^+$ par

$$Y_t^{N,a} = \frac{\overline{Y_{[Nt]}^{[\sqrt{N}a]}}}{\sqrt{N}}.$$

Nous pouvons maintenant déduire des formules de la partie précédente le

Théorème 5.5.1 *Lorsque $N \to \infty$, la suite de processus $(Y_t^{N,a}, t \geq 0)$ converge en loi dans $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \overline{\mathfrak{a}_+})$ vers le mouvement brownien intrinsèque partant de a.*

Preuve : Rappelons que le mouvement brownien intrinsèque partant de $a \in \mathfrak{a}_+$ est à trajectoires dans $\mathfrak{a}_+$. Il en résulte que c'est un processus de Feller de générateur D, dont un core est $C_c^\infty(\mathfrak{a}_+)$, l'espace des fonctions C^∞ à support compact inclus dans $\mathfrak{a}_+$. D'autre part, d'après les calculs de la partie 5.4, le générateur A^N de $(Y_t^{N,a}, t \geq 0)$ est défini pour $f \in C_c^\infty(\mathfrak{a}_+)$ par

$$A_N f(\lambda) = \tilde{\rho}^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{r} q_{t_{\lambda_i}}^{\frac{1}{2}} p_i \sum_{w \in W_0\lambda_i} q_{t_{w\lambda_i}}^{\frac{1}{2}} \frac{F_0(\sqrt{N}\lambda + w\lambda_i)}{F_0(\sqrt{N}\lambda)} f(\lambda + \frac{w\lambda_i}{\sqrt{N}}) \right\} - f(\lambda),$$

pour tous $\lambda \in \frac{P^+}{\sqrt{N}}$. De plus, tout polynôme homogène W_0-invariant de degré 2 est proportionnel à $|\cdot|^2$. En particulier, quitte à bien normaliser $\mathcal{R}$, et d'après (5.3), on obtient que pour toute fonction $f \in C_c^\infty(\mathfrak{a}_+)$, $A_N f$ converge uniformément vers Df sur $\mathfrak{a}_+$. On en déduit le théorème d'après les théorèmes 6.1 p. 28 et 2.5 p. 167 dans [E–K]. ■

5.6 Le cas de la marche aléatoire simple

On souhaite maintenant obtenir un résultat de convergence vers le mouvement brownien intrinsèque partant de 0. C'est en fait plus compliqué à démontrer que le théorème 5.5.1, puisque dans ce cas le critère de Ethier et Kurtz ne s'applique pas directement. En effet, un core du MB intrinsèque partant de 0, contient a priori des fonctions continues non nulles en 0. Or, pour ces fonctions, il n'est pas du tout clair, si la suite $A_N f$ converge uniformément vers Df sur $\overline{\mathfrak{a}_+}$. Par contre, comme le MB intrinsèque est à valeurs dans $\mathfrak{a}_+$ pour $t>0$, le critère s'applique pour $t\geq\eta$ pour tout $\eta>0$. Il ne reste alors plus qu'à obtenir un bon contrôle de ce qui se passe en temps petit. Un moyen pour cela est d'avoir de bonnes estimations du noyau de la chaleur. Or, sauf pour $r=2$, les seules estimations suffisamment précises dont on dispose ne sont connues que pour la marche aléatoire simple sur les immeubles de type $\tilde{A}_r$ (cf [A–Sch–Tro1]). C'est pourquoi dans le résultat qui suit, on se restreindra à ce cas particulier.

On note $(Y_t^N, t\geq 0)$ la F_0-marche simple radiale renormalisée partant de 0, et $(I_t, t\geq 0)$ le MB intrinsèque partant de 0.

Théorème 5.6.1 *La suite $(Y_t^N, t\geq 0)$ converge en loi dans $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \overline{\mathfrak{a}_+})$ vers $(I_t, t\geq 0)$, lorsque $N\to+\infty$.*

Preuve : La preuve se divise en deux étapes. On montre d'abord la convergence en loi unidimensionnelle (lemme 5.6.1 ci-dessous), ce qui permet d'après le critère de Ethier et Kurtz, d'en déduire la convergence en loi sur $[\eta,+\infty)$, pour tout $\eta>0$. Puis on montre un résultat de tension, ce qui permet de conclure la preuve par des théorèmes généraux.

Lemme 5.6.1 *Pour tout $t\geq 0$, Y_t^N converge en loi vers I_t, lorsque $N\to\infty$.*

Preuve du lemme : Soit $f=1_K$ la fonction indicatrice d'un compact K de $\mathfrak{a}_+$, et soit $q^n(0,\cdot)$ le noyau de transition de $(Y_n, n\geq 0)$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(Y_t^N)] &= \sum_{\lambda\in P^+} q^{[Nt]}(0,\lambda)N_\lambda f(\frac{\lambda}{\sqrt{N}}) \\ &= \frac{1}{N^{\frac{r}{2}}}\sum_{u\in\frac{P^+}{\sqrt{N}}\cap K} N^{\frac{r}{2}} q^{[Nt]}(0,\sqrt{N}u)N_{\sqrt{N}u}.\end{aligned}$$

Signalons maintenant que pour tout $u\in\overline{\mathfrak{a}_+}$,

$$|u|^2 := \frac{1}{h(0)}\sum_{i=1}^{r}\sum_{\lambda\in W_0\lambda_i} <\lambda, u>^2,$$

est égal (à une bonne normalisation de $\mathcal{R}^+$ près) à la norme euclidienne au carré de u. Nous allons montrer que pour tout $u\in\frac{P^{++}}{\sqrt{N}}$,

$$N^{\frac{r}{2}} q^{[Nt]}(0,\sqrt{N}u)N_{\sqrt{N}u} \to \text{const}\cdot\frac{\pi(u)^2}{t^{|\mathcal{R}^+|+\frac{r}{2}}}e^{-\frac{|u|^2}{2t}}, \tag{5.7}$$

lorsque $N \to \infty$. La limite étant justement la densité de la loi de I_t, on en déduira le lemme par un argument classique d'approximation d'une intégrale par une série, et le lemme de Sheffé. Déjà rappelons que

$$q^n(0,\lambda) = p^n(0,\lambda)\frac{F_0(\lambda)}{F_0(0)}\tilde{\rho}^{-n},$$

pour tout $\lambda \in P^+$ et tout $n \geq 0$. De plus d'après (5.5), et par W_0-invariance de h, on a

$$p^n(0,\lambda) = \text{const} \cdot \tilde{\rho}^n q_{t_\lambda}^{-\frac{1}{2}} \int_U \tilde{h}^n(i\theta) e^{i<\lambda,\theta>} \frac{d\theta}{c(-i\theta)}.$$

En faisant le changement de variable $\theta \to \frac{\theta}{\sqrt{[Nt]}}$ dans l'intégrale, et en utilisant (5.3), on obtient

$$N^{\frac{r}{2}} q^{[Nt]}(0,\sqrt{N}u) N_{\sqrt{N}u} \sim \text{const} \cdot \frac{\pi(u)}{t^{\frac{|\mathcal{R}^+|}{2}+\frac{r}{2}}} \int e^{-\frac{1}{2}|\theta|^2 + i<\theta,\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{[Nt]}}u>} \pi(-i\theta) b(-\frac{i\theta}{\sqrt{[Nt]}}) d\theta,$$

où b est la fonction continue, non nulle en 0, définie par $\pi b = \frac{1}{\mathbf{c}}$. On effectue alors le changement de variables $\theta \to \theta + i\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{[Nt]}}u$, et on obtient l'équivalent

$$\text{const} \cdot \frac{\pi(u)}{t^{\frac{|\mathcal{R}^+|}{2}+\frac{r}{2}}} e^{-\frac{|u|^2}{2t}} \int e^{-\frac{1}{2}|\theta|^2} \pi(-i\theta + \frac{u}{\sqrt{t}}) d\theta.$$

Pour conclure, remarquons que le polynôme défini pour $x \in \mathfrak{a}$ par

$$r(x) := \int e^{-\frac{1}{2}|\theta|^2} \pi(-i\theta + x) d\theta.$$

est anti W_0-invariant, et de degré exactement $|\mathcal{R}^+|$. Il est donc égal (à une constante multiplicative près) à π (cf [Hel]), ce qui prouve (5.7). La preuve du lemme est terminée. ■

Montrons maintenant le résultat de tension suivant :

Proposition 5.6.1 *Soient $\alpha > 0$ et $\epsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que*

$$\limsup_{N\to\infty} \mathbb{P}\left[\sup_{t\leq\eta} |Y_t^N| \geq \alpha\right] \leq \epsilon.$$

Preuve de la proposition : L'idée de la preuve est tirée de Billingsley [Bil]. Soit

$$A = \left\{\sup_{k\leq[N\eta]} |Y_k| \geq \alpha\sqrt{N}\right\}.$$

On commence par écrire A comme la réunion disjointe suivante

$$A = \coprod_{k=1}^{[N\eta]} A_k,$$

où

$$A_k = \left\{ |Y_1| < \alpha\sqrt{N}, \ldots, |Y_{k-1}| < \alpha\sqrt{N}, |Y_k| \geq \alpha\sqrt{N} \right\}.$$

Maintenant pour $K > 0$ et $\eta > 0$ tel que $\frac{\alpha}{\eta} > K$, soit

$$B = \left\{ |Y_{[N\eta]}| \geq (\frac{\alpha}{\eta} - K)\sqrt{N\eta} \right\}.$$

D'après la propriété de Markov, on a

$$\mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B] + \sum_{k=1}^{[N\eta]} \mathbb{P}[A_k] \mathbb{P}\left[|Y_{[N\eta]} - Y_k| \geq K\sqrt{N\eta} \right]. \tag{5.8}$$

Nous avons maintenant besoin du lemme suivant

Lemme 5.6.2 *On a*

$$\sup_{l \geq 0} \mathbb{P}\left[|Y_l| \geq K\sqrt{l} \right] \to 0,$$

lorsque $K \to \infty$.

Preuve du lemme : D'après les estimations de [A–Sch–Tro1], il existe des constantes $c > 0$ et $C > 0$ telles que

$$q^l(0,x) N_{\overline{x}} \leq C \frac{|x|^{2|\mathcal{R}^+|}}{l^{|\mathcal{R}^+| + \frac{r}{2}}} e^{-c\frac{|x|^2}{l}},$$

pour tout $x \neq 0$ et tout $l \geq |x|$. On en déduit que

$$\sum_{|x| \geq K\sqrt{l}} q^l(0,x) N_{\overline{x}} \leq \frac{C}{l^{|\mathcal{R}^+| + \frac{r}{2}}} \int_{|u| \geq K\sqrt{l}} |u|^{2|\mathcal{R}^+|} e^{-c\frac{|u|^2}{l}} du.$$

En faisant le changement de variable $u \to \sqrt{l}u$, on en déduit le lemme. ■

D'après le lemme

$$\mathbb{P}\left[|Y_{[N\eta]} - Y_k| \geq K\sqrt{N\eta} \right] \leq \mathbb{P}\left[|Y_{[N\eta]}| \geq \frac{K}{2}\sqrt{N\eta} \right] + \mathbb{P}\left[|Y_k| \geq \frac{K}{2}\sqrt{N\eta} \right] \leq \frac{1}{2},$$

pour K assez grand. Alors d'après (5.8)

$$\mathbb{P}[A] \leq 2\mathbb{P}[B],$$

si K est suffisamment grand. Par ailleurs toujours d'après le lemme $\mathbb{P}[B]$ tend vers 0 lorsque η tend vers 0, ce qui prouve la proposition. ■

Le théorème 5.6.1 résulte maintenant de théorèmes généraux (cf par exemple [Bil] ou le théorème 7.2 p. 128 dans [E–K]). ■

Remarque 5.6.1 Comme mentionné précédemment, lorsque $r = 2$ les estimations de [A–Sch–Tro1] sont valides pour toutes les marches aléatoires symétriques au plus proche voisin. Le théorème 5.6.1 est donc aussi valable pour ces marches dans le cas $r = 2$.

Annexe

Frontière de Poisson des matrices triangulaires inversibles à coefficients rationnels

Dans cette annexe nous décrivons de manière explicite la frontière de Poisson du sous-groupe de $GL_d(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures à coefficients rationnels. Ce travail a été étendu au cas de matrices à coefficients dans un corps de nombre dans [Sch4]. Nous ne donnons ici qu'un aperçu de notre résultat sans rentrer dans les détails de la preuve.

Pour commencer nous faisons quelques rappels assez brefs sur la notion de frontière de Poisson, en suivant pour l'essentiel l'exposition de Kaimanovich [Kai2]. Mais avant de donner une définition rigoureuse, disons que grossièrement la frontière de Poisson est un espace mesuré $(\mathbf{B}, \nu)$, qui décrit le comportement asymptotique de marches aléatoires sur les groupes. En même temps cela donne des informations sur la nature géométrique du groupe, et fournit une représentation intégrale des fonctions harmoniques bornées. Le premier exemple connu de telle représentation est peut-être la formule classique de représentation intégrale de Poisson des fonctions harmoniques bornées dans le dique unité du plan complexe (cf e.g. [Kai2]).

Donnons maintenant des définitions plus formelles des notions introduites. Soit un groupe localement compact G, muni d'une mesure de probabilité μ. Une *marche aléatoire* sur (G, μ) est une chaîne de Markov $(x_n)_{n\geq 0}$ sur G, telle que les accroissements $x_n^{-1}x_{n+1}$ sont indépendants et identiquement distribués, de loi μ. On note alors $\mathbb{P}$ la loi de $(x_n)_{n\geq 0}$ sur l'espace des trajectoires $G^{\mathbb{N}}$. On dit que deux trajectoires $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ sont équivalentes, s'il existe des entiers n_1 et n_2 tels que pour tout $n \geq 1$, $x_{n+n_1} = y_{n+n_2}$. On notera **bnd x** la classe d'équivalence de tout élément $\mathbf{x} \in G^{\mathbb{N}}$. Supposons maintenant que G est dénombrable. La *frontière de Poisson* de (G, μ) est par définition le quotient de l'espace mesuré $(G^{\mathbb{N}}, \mathbb{P})$ par la relation d'équivalence définie ci-dessus. Il se trouve que c'est aussi la μ-frontière maximale. Mais détaillons un peu. Soit $\mathbf{B}$ un espace localement compact muni d'une mesure de probabilité ν, et d'une action de G. On définit l'action de

$g \in G$ sur ν par $g\nu(f) = \int_{\mathbf{B}} f(gz)d\nu(z)$, pour toute fonction continue f sur $\mathbf{B}$. On dit que ν est *μ-invariante* si $\int_G (g\nu)d\mu(g) = \nu$. Dans ce cas on dit que $(\mathbf{B}, \nu)$ est une *μ-frontière*, si $\mathbb{P}$-presque sûrement, $x_n\nu$ converge vaguement vers une mesure de Dirac. Un résultat de Kaïmanovich [Kai2] établit que toute μ-frontière est le quotient de la frontière de Poisson par une partition mesurable en classes d'équivalences de l'espace des trajectoires. Ceci explique le terme de *μ-frontière maximale* pour la frontière de Poisson.

D'autre part le semigroupe engendré par μ, noté $\mathrm{sgr}(\mu)$, est défini par $\mathrm{sgr}(\mu) = \cup_n \mathrm{supp}(\mu^{*n})$. Une fonction f sur $\mathrm{sgr}(\mu)$ est dite *μ-harmonique* si $\int_G f(gg')d\mu(g') = f(g)$ pour tout $g \in \mathrm{sgr}(\mu)$. Il est démontré dans [Kai2] qu'il existe une isométrie entre l'espace $\mathcal{H}^\infty(G, \mu)$ des fonctions μ-harmoniques bornées f sur $\mathrm{sgr}(\mu)$ et l'espace $L^\infty(\mathbf{B}, \nu)$ des fonctions F bornées sur $\mathbf{B}$. L'isométrie est donnée par les formules

$$F(\mathbf{bnd}\ \mathbf{x}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n), \qquad f(g) = \int_{\mathbf{B}} F(gz)d\nu(z).$$

La seconde formule est appelée formule de représentation intégrale de Poisson.

Il existe une vaste littérature sur les frontières de Poisson, et de nombreux types de groupes ont été étudiés. Le premier exemple non trivial est sans doute celui des groupes de Lie semi-simples, analysé en profondeur, d'abord par Furstenberg [F1], puis par de nombreux autres auteurs pour des marches aléatoires plus générales (cf e.g. [Az] [Gu–Ji–T] [Ra]). Dans ce cas la frontière de Poisson est toujours donnée par la variété drapeau (qui sera définie dans la suite), munie d'une certaine mesure. Pour le lecteur interessé nous citerons aussi le cas des groupes (de Lie) résolubles [Er] [Ra], des groupes hyperboliques [Kai1], des groupes amenables [Er], des groupes discrets [Kai–V] [Led], ou encore des groupes dénombrables [Br] [Kai2]. Bien sûr cette liste est loin d'être exhaustive, et pour d'autres références on pourra consulter [Fur] ou [Kai2].

Mais le groupe qui a motivé notre étude est le groupe des transformations affines d'un corps $\mathbb{K}$. Il est défini comme l'ensemble des transformations de la forme $x \mapsto ax + b$, avec $a \neq 0$. Ce groupe a été abondamment étudié sur le corps des réels (cf e.g. [Eli]), mais aussi sur les corps p-adiques [Ca–Kai–Wo], et plus récemment sur le corps des rationels dans l'article [Br], qui est à la base de notre travail. Dans le cas du corps des réels ou des corps p-adiques, sous de bonnes hypothèses sur le support de la mesure μ, la frontière de Poisson est la droite projective (qui dans ce cas particulier s'identifie à la variétée drapeau) sur le corps en question. Par contre dans le cas rationnel, la frontière de Poisson est cette fois le produit de toutes les droites projectives sur tous les corps p-adique et sur $\mathbb{R}$, muni d'une certaine mesure ν. De plus on peut décrire explicitement l'ensemble des nombres premiers p tels que la restriction de ν au facteur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ soit triviale, i.e. supportée par un unique point (cf [Br]).

Dans notre travail nous avons considéré le groupe $A(\mathbb{Q})$ des matrices triangulaires supérieures de taille $d \geq 2$ à coefficients rationnels, et coefficients diagonaux non nuls. Le cas $d = 2$ correspond au groupe des transformations affines rationnelles. Nous avons alors obtenu l'analogue du résultat de Brofferio, à savoir que la frontière de Poisson est donnée par le produit des variétés drapeau $\mathcal{F}_p$ sur tous les corps p-adiques (et $\mathbb{R}$), muni d'une certaine mesure ν, dont on donne des précisions sur le support de sa restriction à chacun des facteurs $\mathcal{F}_p$.

Mais avant de détailler notre résultat nous avons besoin d'introduire quelques notations. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers union l'infini, et $\mathcal{P}^*$ l'ensemble $\mathcal{P} \setminus \{\infty\}$. Etant donné $p \in \mathcal{P}$, on note $\mathbb{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques ($\mathbb{Q}_\infty$ désigne par convention le corps des réels $\mathbb{R}$), et on note $|\cdot|_p$ la norme p-adique usuelle. Pour $p \in \mathcal{P}$ et $i \in [1, \cdots, d]$, on pose

$$\phi_p(i) = \int_{A(\mathbb{Q})} \ln(|a_{i,i}|_p) d\mu(a).$$

La variété drapeau $\mathcal{F}_p$ de $\mathbb{Q}_p^d$ est par définition l'espace des suites $H_1 \subset \cdots \subset H_d$ de $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels tels que pour tout i, $\dim H_i = i$. On définit B_p comme le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures b de taille d, dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1, et tels que $b_{i,j} = 0$ si $i < j$ et $\phi_p(i) \geq \phi_p(j)$. En fait B_p s'injecte naturellement dans $\mathcal{F}_p$. L'injection est donnée par l'application qui à tout élément b de B_p associe l'élément de $\mathcal{F}_p$ tel que pour tout i, H_i est le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel engendré par les i dernières colonnes de b.

Il faut maintenant définir l'action de $A(\mathbb{Q})$ sur B_p. Pour cela nous introduisons encore quelques notations. On pose pour $j \leq d$,

$$J_j = \{i \leq j \mid \phi_p(i) \geq \phi_p(j)\}.$$

Soit r_j le cardinal de J_j, et soient $i_1 < \cdots < i_{r_j} = j$ les éléments de J_j. Etant donné une matrice m et $j \leq d$, on notera m_j sa $j^{\text{ème}}$ colonne. On définit alors l'action $a \cdot b$ de $a \in A(\mathbb{Q})$ sur $b \in B_p$ récursivement. D'abord on pose $(a \cdot b)_2 = \frac{ab_2}{a_{2,2}}$. Puis $(a \cdot b)_j$ est l'unique vecteur colonne de la forme $(\alpha_{1,j}, \ldots, \alpha_{j-1,j}, 1, 0 \ldots, 0)$ avec $\alpha_{i,j} = 0$ si $i \in J_j$, tel que $(a \cdot b)_{i_1}, \ldots, (a \cdot b)_{i_{r_j - 1}}, (a \cdot b)_j$ d'une part, et $(a \cdot b)_{i_1}, \ldots, (a \cdot b)_{i_{r_j - 1}}, ab_j$ d'autre part, engendrent le même espace vectoriel.

On note $\ln^+$ la partie positive de la fonction ln. Notre résultat est le suivant

Théorème 5.6.2 *Soit μ une mesure de probabilité sur $A(\mathbb{Q})$ telle que*

$$\int_{A(\mathbb{Q})} \sum_{1 \leq i < j \leq d} \left(\sum_{p \in \mathcal{P}^*} |\ln |a_{i,i}|_p| + \sum_{p \in \mathcal{P}} \ln^+ |a_{i,j}|_p \right) d\mu(a) < +\infty.$$

Alors il existe une unique mesure μ-invariante ν sur l'espace

$$\mathbf{B} := \prod_{p \in \mathcal{P}} B_p,$$

tel que l'espace mesuré $(\mathbf{B}, \nu)$ soit la frontière de Poisson de la marche aléatoire de loi μ sur $A(\mathbb{Q})$.

Ce résultat est encore restreint à un groupe assez particulier, mais nous souhaiterions dans le futur pouvoir l'étendre au cadre beaucoup plus général considéré par Raugi [Ra]. Une autre question que nous n'avons pu encore aborder est celle des propriétés fines de la mesure ν (plus de précisions sur le support, et comportement à l'infini par exemple).

En ce qui concerne la preuve maintenant, nous avons suivi la démarche générale de Brofferio [Br]. Elle repose sur deux points principaux : d'une part un critère de Kaimanovich [Kai2] pour les groupes dénombrables, et d'autre part le fait que $\mathbb{Q}$ s'injecte dans l'anneau des adèles (cf [Lan]), dans lequel on peut définir des gauges naturelles bien adaptées pour appliquer le critère de Kaimanovich. Néanmoins il serait aussi intéressant de voir si nous ne pourrions pas aussi utiliser la démarche de Bader et Shalom [Bad–Sh]. Ils montrent que la frontière de Poisson d'un produit de groupes est donnée par le produit des frontières de Poisson de ces groupes, et en déduisent en particulier (via aussi l'injection de $\mathbb{Q}$ dans l'anneau des adèles) la frontière de Poisson du groupe des points rationnels de groupes algébriques semi-simples.

Bibliographie

[A1] **Anker J-Ph. :** *La forme exacte de l'estimatation fondamentale de Harish-Chandra*, C. R. Acad. Sci. Paris Série I Math. 305 (1987), 371–374.

[A2] **Anker J-Ph. :** *The spherical Fourier transform of rapidly decreasing functions. A simple proof of a characterization due to Harish-Chandra, Helgason, Trombi, and Varadarajan*, J. Funct. Anal. 96 (1991), 331–349.

[A–B–J] **Anker J-Ph., Bougerol Ph., Jeulin T. :** *The infinite Brownian loop on a symmetric space*, Rev. Mat. Iberoamericana 18 (2002), 41–97.

[A–Ji] **Anker J-Ph., Ji L. :** *Heat kernel and Green function estimates on noncompact symmetric spaces*, Geom. Funct. Anal. 9 (1999), 1035–1091.

[A–Ost1] **Anker J-Ph., Ostellari P. :** *The heat kernel on noncompact symmetric spaces*, in *Lie groups and symmetric spaces : In memory of Karpelevich F.I.*, Gindikin S.G. (ed.), Amer. Math. Soc. Transl. 210 (2003), 27–46.

[A–Ost2] **Anker J-Ph., Ostellari P. :** *Global heat kernel bounds on noncompact symmetric spaces*, en préparation.

[A–Sch–Tro1] **Anker J-Ph., Schapira Br., Trojan B.** : *Heat kernel and Green function estimates on affine buildings of type* $\tilde{A}_r$, en préparation.

[A–Sch–Tro2] **Anker J-Ph., Schapira Br., Trojan B.** : *Marches aléatoires sur les arbres et sur les immeubles*, à paraître dans Proc. CSMT2006 (14ème colloque de la Société Mathématique de Tunisie, Hammamet, 20–23 mars 2006).

[Az] **Azencott R. :** *Espaces de Poisson des groupes localement compacts*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 148. Springer-Verlag, Berlin-New York, (1970).

[Ba] **Babillot M. :** *A probabilistic approach to heat diffusion on symmetric spaces*, J. Theoret. Probab. 7 (1994), 599–607.

[Bad–Sh] **Bader U., Shalom Y. :** *Factor and normal subgroup theorems for lattices in products of groups*, Invent. Math. 163, (2006), 415–454.

[Bi1] **Biane Ph. :** *Quelques propriétés du mouvement Brownien dans un cône*, Stochastic Processes. Appl. 53 (1994), 233–240.

[Bi2] **Biane Ph.** : *Quantum random walk on the dual of* $\mathrm{SU}(n)$, Probab. Theory Related Fields 89 (1991), 117–129.

[Bi3] **Biane Ph.** : *Minuscule weights and random walks on lattices*, Quantum probability and related topics, QP-PQ, VII, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, (1992), 51–65.

[Bi4] **Biane Ph.** : *Équation de Choquet-Deny sur le dual d'un groupe compact*, Probab. Theory Related Fields 94 (1992), 39–51.

[Bi–B–OC] **Biane Ph., Bougerol Ph., O'Connell N. :** *Littelmann paths and Brownian paths*, Duke Math. J. 130 (2005), 127–167.

[BS–Or] **Ben Saïd S., Ørsted B.** *Bessel functions for root systems via the trigonometric setting*, Int. Math. Res. Not. (2005), 551–585

[Bil] **Billingsley P.** : *Convergence of Probability measures*, Wiley Series in Probability and Statistics, a Wiley-Interscience Publication, John Wiley and Sons, Inc., New York, (1999).

[B–J1] **Bougerol Ph., Jeulin T. :** *Brownian bridge on Riemannian symmetric spaces*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 333 (2001), 785–790.

[B–J2] **Bougerol Ph., Jeulin T. :** *Brownian bridge on hyperbolic spaces and on homogeneous trees*, Probab. Th. Rel. Fields 115 (1999), 95–120.

[Bou] **Bourbaki N. :** *Groupes et algèbres de Lie*, Ch. 4-6, Hermann, Paris, (1968) ; Masson, Paris, (1981).

[Br] **Brofferio S. :** *The Poisson Boundary of random rational affinities*, Ann. Inst. Fourier 56, (2006), 499–515.

[Bro] **Brown K. :** *Buildings*, Springer-Verlag, New-York, 1989.

[Ca] **Cartwright D. I. :** *Spherical harmonic analysis on buildings of type $\tilde{A}_n$*, Monatsh. Math. 133, (2001), 93–109.

[Ca–Kai–Wo] **Cartwright D. I., Kaimanovich V. A., Woess W. :** *Random walks on the affine group of local fields and of homogeneous trees*, Ann. Inst. Fourier 44 (1994), 1243–1288.

[Ca–Wo] **Cartwright D. I., Woess W.** : *Isotropic random walks in a building of type $\tilde{A}_d$*, Math. Z. 247 (2004), 101–135.

[Cep] **Cépa E. :** *Equations différentielles stochastiques multivoques*, Sém. Probab. XXIX (1995), 86–107.

[Cep–Lep] **Cépa E., Lépingle D. :** *Brownian particles with electrostatic repulsion on the circle : Dyson's model for unitary random matrices revisited*, ESAIM Probab. Statist. 5 (2001), 203–224.

[C1] **Cherednik I. :** *A unification of Knizhnik-Zamolodchnikov equations and Dunkl operators via affine Hecke algebras*, Invent. Math. 106 (1991), 411–432.

[C2] **Cherednik I. :** *Inverse Harish-Chandra transform and difference operators*, Internat. Math. Res. Notices 15 (1997), 733–750.

[C3] **Cherednik I. :** *Double affine Hecke algebras*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 319, Cambridge University Press, Cambridge, (2005).

[C4] **Cherednik I. :** *Double affine Hecke algebras and Macdonald's conjectures*, Ann. Math. 141, (1995), 191–216.

[C5] **Cherednik I. :** *Macdonald's evaluation conjectures and difference Fourier transform*, Invent. Math. 122, (1995), 119–145.

[Chy1] **Chybiryakov O. :** *Skew-product representations of multidimensional Dunkl Markov processes*, Stochastic Process. Appl. 116, (2006), 857–872.

[Chy2] **Chybiryakov O. :** *Radial Dunkl Markov processes, local times and a multidimensional extension of Lévy's equivalence*, in Ph.D. thesis, (2006).

[Cow–Nev] **Cowling M., Nevo A. :** *Uniform estimates for spherical functions on complex semisimple Lie groups*, Geom. Funct. Anal. 11 (2001), 900–932.

[Del] **Deligne P. :** *Equations Différentielles à Points Singuliers Réguliers*, LNM 163, Springer-Verlag, (1970).

[D] **Delorme P. :** *Transformation de Fourier hypergeometrique*, J. Funct. Anal. 168 (1999), 239–312.

[Dub] **Dubédat J. :** *Reflected planar Brownian motions, intertwining relations and crossing probabilities*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 40 (2004), 539–552.

[Dun] **Dunkl C. F. :** *Differential-difference operators associated to reflection groups*, Trans. Amer. Math. Soc., 311 (1989), 167–183.

[E–K] **Ethier N., Kurtz G. :** *Markov processes. Characterization and convergence*, Wiley Series in Probab. Math. Stat., (1986).

[Eli] **Elie L. :** *Noyaux potentiels associés aux marches aléatoires sur les espaces homogènes. Quelques exemples clefs dont le groupe affine*, in Théorie du potentiel (Orsay, 1983), volume 1096 of Lectures Notes in Math., 223–260, Springer, Berlin, 1984.

[Er] **Erschler A. :** *Liouville property for groups and manifolds*, Invent. Math. 155, (2004), 55–80.

[Fu–Osh–Ta] **Fukushima M., Oshima Y., Takeda M. :** *Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes*, de Gruyter Stud. in Math. 19 (1994).

[Fur] **Furman A. :** *Random walks on groups and random transformations*, Handbook of dynamical systems, vol. 1A, pp. 931–1014, Amsterdam : North-Holland (2002).

[F1] **Furstenberg H. :** *A Poisson formula for semi-simple Lie groups*, Ann. of Math. 77 (1963), 335–386.

[F2] **Furstenberg H. :** *Boundary theory and stochastic processes on homogeneous spaces*, in Harmonic analysis on homogeneous spaces (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXVI, Williams Coll., Williamstown, Mass., 1972), p. 193–229, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1973.

[G–Y1] **Gallardo L., Yor M. :** *Some remarkable properties of the Dunkl martingales*, Sém. Probab. XXXVIII, dedicated to Paul André Meyer, Springer (2005).

[G–Y2] **Gallardo L., Yor M. :** *Some new examples of Markov processes which enjoys the time-inversion property*, Probab. Th. Rel. Fields 132 (2005), 150–162.

[G–Y3] **Gallardo L., Yor M. :** *A chaotic representation property of the multidimensional Dunkl processes*, à paraître dans Ann. Prob (2006).

[Gan–Var] **Gangolli R., Varadarajan V. S. :** *Harmonic analysis of spherical functions on real reductive groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 101, Springer-Verlag, Berlin, (1988), xiv+365 pp.

[Gu–Ji–T] **Guivarc'h Y., Ji L., Taylor J. C. :** *Compactifications of symmetric spaces*, Progress in Mathematics, 156. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, (1998).

[HaCh1] **Harish-Chandra :** *Harmonic analysis on real reductive groups. I. The theory of the constant term*, J. Funct. Anal. 19, (1975), 104–204.

[HaCh2] **Harish-Chandra :** *Harmonic analysis on real reductive groups. II. Wavepackets in the Schwartz space*, Invent. Math. 36 (1976), 1–55.

[HaCh3] **Harish-Chandra :** *Harmonic analysis on real reductive groups. III. The Maass-Selberg relations and the Plancherel formula*, Ann. of Math. (2) 104, (1976), 117–201.

[H] **Heckman G. J. :** *Root systems and hypergeometric functions II.* Compositio Math. 64 (1987), 353–373.

[H–O] **Heckman G. J., Opdam E. M. :** *Root systems and hypergeometric functions I.* Compositio Math. 64 (1987), 329–352.

[H–S] **Heckman G. J., Schlichtkrull H. :** *Harmonic analysis and special functions on symmetric spaces*, Academic Press (1994).

[Hel] **Helgason S. :** *Groups and Geometric Analysis*, Academic Press (1984).

[Jac] **Jacod J. :** *Calcul stochastique et problèmes de martingales*, Lect. Notes Math. 714, Springer, Berlin Heidelberg New York (1979).

[Jac–Sh] **Jacod J., Shiryaev A. N. :** *Limit theorems for stochastic processes*, Springer, Berlin Heidelberg New York (1987).

[Je1] **De Jeu M.F.E. :** *The Dunkl transform*, Invent. Math. 113 (1993), 147–162.

[Je2] **De Jeu M.F.E. :** *Paley-Wiener theorems for the Dunkl transform*, disponible sur arxiv math.CA/0404439.

[Kai1] **Kaimanovich V. A. :** *The Poisson formula for groups with hyperbolic properties,* Ann. of Math. 152 (2000) no.3, 659–692.

[Kai2] **Kaimanovich V. A. :** *Poisson boundary of discrete groups*, a survey, manuscrit non publié.

[Kai–V] **Kaimanovich V. A., Vershik A. M. :** *Random walks on discrete groups : boundary and entropy*, Ann. Probab. 11, (1983), 457–490.

[Lal1] **Lalley S. P. :** *Saddle-point approximations and space-time Martin boundary for nearest-neighbor random walk on a homogeneous tree*, J. Theoret. Probab. 4 (1991), 701–723.

[Lal2] **Lalley S. P. :** *Finite range random walk on free groups and homogeneous trees*, Ann. Probab. 21, (1993), 2087–2130.

[Lan] **Lang S. :** *Introduction to diophantine approximations.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., (1966).

[Law–Schr–Wer] **Lawler G. F., Schramm O., Werner W. :** *Conformal restriction : the chordal case*, J. Amer. Math. Soc. 16 (2003), 917–955.

[LG] **Le Gall J-F. :** *Mouvement brownien, cônes et processus stables*, Probab. Theory Related Fields 76 (1987), 587–627.

[Led] **Ledrappier F. :** *Poisson boundaries of discrete groups of matrices*, Isr. J. Math. 50, (1985), 319–336.

[Mac1] **Macdonald I. G. :** *Affine Hecke Algebras and Orthogonal Polynomials*, vol. 157 of Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge, (2003).

[Mac2] **Macdonald I. G. :** *Spherical Functions on a Group of p-adic type*, vol. No. 2 of Publications of the Ramanujan Institute, Ramanujan Institute, Centre for Advanced Study in Mathematics, University of Madras, Madras, (1971).

[Mac3] **Macdonald I. G. :** *Orthogonal Polynomials Associated with Root Systems*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire, 45 (Article B45a), (2000).

[Mac4] **Macdonald I. G. :** *Some conjectures for root systems*, SIAM Journal of Mathematical Analysis 13, (1982), 988–1007.

[Mey] **Meyer P. A. :** *Intégrales stochastiques.* Sém. Probab. I, Lect. Notes Math. 39, Springer-Verlag (1967).

[OC] **O'Connell N.** : *Random matrices, non-collinding processes and queues*, Seminaire de Probabilites XXXVI, Lecture Notes in Mathematics 1801, Springer, (2003), 165–182.

[O1] **Opdam E. M. :** *Harmonic analysis for certain representations of graded Hecke algebras*, Acta Math. 175 (1995), 75–121.

[O2] **Opdam E. M. :** *Root systems and hypergeometric functions III.* Compositio Math. 67 (1988), 21–49.

[O3] **Opdam E. M. :** *Dunkl operators, Bessel functions and the discriminant of a finite coxeter group*, Comp. Math. 85, (1993), 333–373.

[O4] **Opdam E. M. :** *Some applications of hypergeometric shift operators*, Invent. Math. 98, (1989), 1–18.

[Par1] **Parkinson J.** : *Spherical harmonic analysis on affine buildings*, à paraître dans Math. Z.

[Par2] **Parkinson J.** : *Buildings and Hecke Algebras*, Ph.D. thesis, University of Sydney, (2005).

[Par3] **Parkinson J.** : *Buildings and Hecke Algebras*, Journal of Algebra, 297, (2006), 1–49.

[Par4] **Parkinson J. :** *Isotropic random walks on affine buildings*, submitted.

[Pa] **Pasquale A. :** *Asymptotic analysis of Θ-hypergeometric functions*, Invent. Math. 157, (2004), 71–122.

[Pic–Woe] **Picardello M. A., Woess W. :** *The full Martin boundary of the bi-tree*, Ann. Probab. 22 (1994), 2203–2222.

[Pro–Wei] **Protter M. H., Weinberger H. F. :** *Maximum principles in differential equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1967.

[Ra] **Raugi A. :** *Fonctions harmoniques sur les groupes localement compacts à base dénombrable*, Bull. Soc. Math. France Mém. No. 54, (1977), 5–118.

[R–Y] **Revuz D., Yor M. :** *Continuous martingales and Brownian motion*, Springer-Verlag, third ed. (1999).

[Ron] **Ronan M. :** *Lectures on Buildings*, Perspective in Mathematics, Academic Press, (1989).

[Ros1] **Rösler M. :** *Generalized Hermite polynomials and the heat equation for Dunkl operators*, Comm. Math. Phys. 192, (1998), 519–542.

[Ros2] **Rösler M. :** *Positivity of Dunkl's intertwining operator*, Duke Math. J. 98 (1999), 445–463.

[Ros–Voi1] **Rösler M., Voit M. :** *Markov processes related with Dunkl operators*, Adv. Appl. Math. 21 (1998), no.4, 575–643.

[Ros–Voi2] **Rösler M., Voit M. :** *Positivity of Dunkl's intertwining operator via the trigonometric setting*, Int. Math. Res. Not. (2004), 3379–3389.

[Saw] **Sawyer P. :** *A global estimate of the Legendre function for the root systems of type A with arbitrary multiplicities*, à paraître dans Canad. Math. Bull.

[Sch1] **Schapira Br. :** *Contributions to the hypergeometric function theory of Heckman and Opdam : sharp estimates, Schwartz space, heat kernel*, prépublication sur HAL et arxiv math.CA/0605045.

[Sch2] **Schapira Br. :** *The Heckman-Opdam Markov processes*, à paraître dans Probab. Th. Rel. Fields.

[Sch3] **Schapira Br. :** *Marches aléatoires sur un immeuble affine de type $\tilde{A}_r$ et mouvement brownien de la chambre de Weyl*, arxiv math.PR/0611529.

[Sch4] **Schapira Br. :** *The Poisson boundary of triangular matrices in a number field*, en préparation.

[Ti] **Tits J :** *Buildings of Spherical Type and Finite BN-pairs*, vol. 386 of Lect. Notes. in Math., Springer-Verlag, (1974).

[Wo] **Woess W. :** *Random walks on infinite graphs and groups*, Cambridge Tracts in Mathematics 138, Cambridge University Press.

TITRE : Etude analytique et probabiliste de laplaciens associés aux systèmes de racines : laplacien hypergéométrique de Heckman–Opdam et laplacien combinatoire sur les immeubles affines.

RESUME : Cette thèse porte sur une étude analytique et probabiliste des théories de Heckman–Opdam et des immeubles affines de type $\tilde{A}_r$. On étudie aussi la frontière de Poisson des matrices triangulaires inversibles rationnelles.

Un de nos principaux résultats est l'obtention de nouvelles estimations des fonctions hypergéométriques de Heckman–Opdam. Nos preuves sont relativement plus simples que dans le cas particulier des espaces symétriques G/K. Par exemple pour les estimations de base des fonctions sphériques, obtenues par Harish-Chandra, ou Gangolli et Varadarajan, ainsi que pour les estimations récentes de la fonction sphérique élémentaire ϕ_0 par Anker, Bougerol et Jeulin.

Un des autres principaux résultats est l'estimation du noyau de la chaleur associé à un certain laplacien combinatoire sur un immeuble affine de type $\tilde{A}_r$.

TITLE : Analytical and probabilistic study of Laplacians associated with root systems : hypergeometric Laplacian of Heckman–Opdam and combinatorial Laplacian on affine buildings.

ABSTRACT : In this thesis, we are interested in the study of analytical and probabilistic aspects of Heckman–Opdam and affine buildings of type $\tilde{A}_r$ theories. We also study the Poisson boundary of rational triangular matrices.

One of our main results, is to obtain new estimates of the hypergeometric functions of Heckman–Opdam. Our proofs are relatively more elementary than in the particular case of symmetric spaces G/K. For instance for the proof of the basic estimates of spherical functions, obtained by Harish-Chandra or Gangolli and Varadarajan, and for the recent estimate of the elementary spherical function ϕ_0 by Anker, Bougerol and Jeulin.

Another main result is the estimate of the heat kernel associated with some combinatorial Laplacian on an affine building of type $\tilde{A}_r$.

DISCIPLINE : Mathématiques

MOTS-CLES : Système de racines, théorie de Heckman–Opdam, immeubles affines, noyau de la chaleur, processus stochastiques, marches aléatoires, théorèmes limites, frontière de Poisson.

MAPMO, BP 6759, Université d'Orléans, 45067 Orléans cedex 2, France